Theoretische Elektrodynamik für Lehramt

Vorlesung 7: Magnetisches Moment und Faraday’sches Induktionsgesetz

Wolfgang Wieland

Institut für Quantengravitation
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

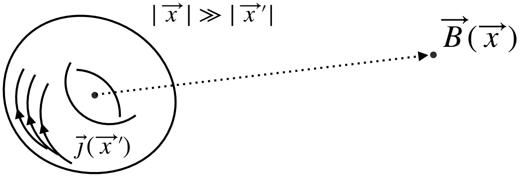
www.wmwieland.eu

15-06-2023

Inhalt dieser Vorlesung

Magnetisches Dipolmoment und Magnetisierung

Wir sind am Magnetfeld in großer Entfernung von den erzeugenden Strömen interessiert.



- Betrachte isolierte Stromverteilung $\vec{\jmath}(\vec{x})$, d.h. $\vec{\jmath}(\vec{x}) = 0$ außerhalb kompakten Bereichs B.
- Das Magnetfeld ist durch das *Vektorpotential* $\vec{A}(\vec{x})$ eindeutig bestimmt. Dieses lässt sich bis auf ein unbestimmtes Gradientenfeld als folgendes Volumsintegral schreiben:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \, \frac{\vec{\jmath}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{\nabla}\chi, \quad \text{ObdA:} \quad \chi = 0.$$

- Für $|\vec{x}'| > |\vec{x}|$ lauten die ersten beiden Terme der Multipolentwicklung

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + \mathcal{O}\Big(\frac{|\vec{x}|^3}{|\vec{x}|^3}\Big).$$

In großer Entfernung von den Strömen erhalten wir in guter Nährung

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}|}\int d^3x'\,\vec{\jmath}(\vec{x}') + \frac{1}{|\vec{x}|^3}\int d^3x'\,(\vec{x}\cdot\vec{x}')\vec{\jmath}(\vec{x}'),$$

$$A^k(\vec{x}) = \frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}|}\int d^3x'\,j^k(\vec{x}') + \frac{x^l}{|\vec{x}|^3}\int d^3x'\,x'_l j^k(\vec{x}').$$

Mittels der Kirchhoff'schen Regeln lassen sich die Integrale vereinfachen.

Betrachte dazu eine aus einzelnen (überlappenden) Leiterschleifen zusammengesetzte stationäre Ladungsverteilung $\vec{\jmath}(\vec{x})$ in B, d.h.

$$\vec{\jmath}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} I_i \oint_{\gamma_i} dt\,\frac{\mathrm{d}\vec{x}_i(t)}{\mathrm{d}t}\,\delta\big(\vec{x}-\vec{x}_i(t)\big).$$

Kirchoff'sche Regeln in differentieller Form besagen nun

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath} = -\sum_{i=1}^{N} I_i \oint_{\gamma_i} dt\,\frac{\mathrm{d}\vec{x}_i(t)}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{\nabla}\delta\big(\vec{x}-\vec{x}_i(t)\big) = 0.$$

Außerhalb vom Gebiete B sei außerdem

$$\vec{\jmath}(\vec{x}) = 0 \quad \text{für alle} \quad \vec{x}\in\mathbb{R}^3 - \{B\}.$$

Betrachte zunächst folgenden Trick. Aus $\partial_m x^k = \delta^k_m$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath} = 0$ folgt

$$\begin{aligned}\partial_m (j^m x^k) &= (\partial_m j^m) x^k + j^m \partial_m x^k = \\ &= x^k \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath}}_{=0} + j^m \delta^k_m = j^m \delta^k_m = j^k.\end{aligned}$$

Damit lässt sich das Integral $\int d^3x\, \vec{\jmath}$ mittels Gauß'schem Satz als verschwindendes Randintegal schreiben

$$\int d^3x\, j^k = \int d^3x\, \partial_k (j^k x^m) = \lim_{R\to\infty} \oint_{|\vec{x}|=R} d^2S_k\, j^k x^m = 0,$$

da die Stromverteilung außerhalb von B verschwindet.

Auf die gleiche Weise folgt aus

$$\begin{aligned}\partial_m (j^m x^k x^l) &= (\partial_m j^m) x^k x^l + j^m (\partial_m x^k) x^l + j^m x^k \partial_m x^l = \\ &= x^k x^l \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath}}_{=0} + j^m \delta^k_m x^l + j^m x^k \delta^l_m = j^k x^l + j^l x^k,\end{aligned}$$

dass der *symmetrische* Anteil von $\int d^3x\, j^k x^l$ verschwinden muss,

$$\frac{1}{2} \int d^3x \big(j^k x^l + j^l x^k\big) = \frac{1}{2} \int d^3x\, \partial_m (j^m x^k x^l) = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \oint_{|\vec{x}|=R} d^2S_m\, j^m x^k x^l = 0.$$

Nebenrechnung: Integrale über die Stromverteilung

Es bleibt uns also nur der antisymmetrische Anteil übrig:

$$\int d^3x\, j^k x^l = \frac{1}{2}\int d^3x\big(j^k x^l + j^l x^k\big) + \frac{1}{2}\int d^3x\big(j^k x^l - j^l x^k\big) =$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3x\big(j^k x^l - j^l x^k\big). \qquad (*)$$

Steht im Integrand ein Produkt aus Ortsvektor und Stromdichte lässt sich dieses antisymmetrisieren. Der entstehende Ausdruck lässt sich als Skalarprodukt zweier Kreuzprodukte auffassen (vertausche hier $\vec{x}$ und $\vec{x}'$).

Komponentennotation: $\quad j^k x'^l - j^l x'^k = \epsilon^{klm}\epsilon_{mrs} j^r x'^s,$

In Vektornotation außerdem: $\quad \vec{j}\cdot(\vec{x}'\cdot\vec{x}) - \vec{x}'\cdot(\vec{j}\cdot\vec{x}) = \vec{x}\times(\vec{j}\times\vec{x}').$

Auf der vorigen Folie fanden wir $\int d^3x\,\vec{j} = 0$. Aus der Multipolentwicklung und $(*)$ erhalten wir nun

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}|}\int d^3x'\,\vec{j}(\vec{x}') + \frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}|^3}\int d^3x'\,\vec{j}(\vec{x}')\cdot(\vec{x}'\cdot\vec{x}) =$$
$$= \frac{1}{c}\frac{1}{2|\vec{x}|^3}\int d^3x'\big(\vec{j}\cdot(\vec{x}'\cdot\vec{x}) - \vec{x}'\cdot(\vec{j}\cdot\vec{x})\big) =$$
$$= \frac{1}{c}\frac{1}{2|\vec{x}|^3}\int d^3x'\,\vec{x}\times\big(\vec{j}(\vec{x}')\times\vec{x}'\big).$$

In großer Entfernung von den Strömen ergibt sich folgende Nährungsformel für das Vektorpotential der Stromverteilung

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \mathcal{O}\big(|\vec{x}|^{-3}\big).}$$

Wobei $\vec{m}$ das magnetische Dipolmoment der Stromverteilung bezeichne

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3x\,\vec{x}\times\vec{j}(\vec{x}).}$$

Im Gegensatz zum elektrostatischen Feld sind in führender Ordnung also alle von lokalen Strömen erzeugte Magnetfelder Dipolfelder.

Die Magnetisierung $\vec{M}$ ist die lokale Dipoldichte

$$\boxed{\vec{m} = \int d^3x\,\vec{M}.}$$

Magnetisches Dipolmoment: Zusammenhang mit Drehimpuls

Ströme sind bewegte Ladungsträger. Eine Verteilung von N solchen Ladungsträgern mit Massen $M_1, \ldots M_N$, Ladungen $q_1, \ldots, q_N$ und Ortsvektoren $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_1(t)$ erzeugt ein magnetisches Moment

$$\begin{aligned} \vec{m}(t) &= \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{x}_i(t) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{x}_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{M_i} \vec{x}_i(t) \times \vec{p}_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{M_i} \vec{L}_i(t), \end{aligned}$$

wobei $\vec{p}_i$ und $\vec{L}_i$ Impuls und Drehimpuls bezeichne. Sind die Teilchen alle gleich, vereinfacht sich der Ausdruck. Wir erhalten

$$\boxed{\vec{m} = \frac{q}{M} \vec{L},}$$

wobei $\vec{L}$ den Gesamtdrehimpuls der Ladungsträger bezeichne. Der Bruch aus q und M heißt außerdem spezifische Ladung.

Kraft auf magnetischen Dipol im Magnetfeld

Was geschieht, wenn ein magnetischer Dipol in ein äußeres Magnetfeld gerät? Wir sind an jenem Fall interessiert, wo das $\vec{B}$-Feld in guter Näherung durch die ersten beiden Terme einer Taylorreihe um einen Punkt $\vec{x}_o$ innerhalb der Stromverteilung gegeben ist.

- Wir fassen den Dipol als lokalisierte Stromverteilung auf.
- Nach dem Biot–Savart'schen Gesetz erfährt diese eine Kraft $\vec{F}$ im äußern Magnetfeld.

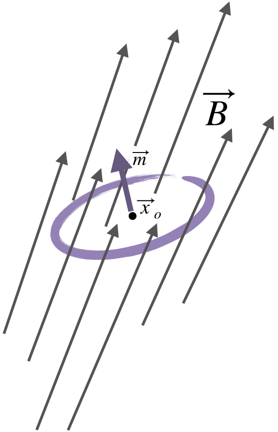
$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3x \, \vec{\jmath}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}).$$

- Wir entwickeln im Integral das Magnetfeld um $\vec{x}_o$.

$$B^l(\vec{x}) = B^l(\vec{x}_o) + (x^m - x_o^m)\partial_m B^l(\vec{x}_o) + \dots$$

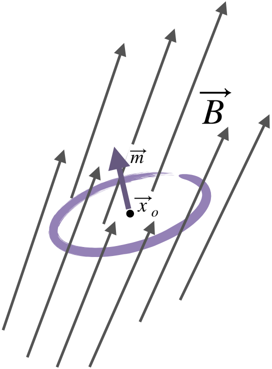
- Aus der Stromerhaltung $\vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath} = 0$ folgt, dass die von $\vec{x}$-unabhängigen Terme in der Entwicklung keinen Beitrag liefern, damit

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3x \, \vec{\jmath}(\vec{x}) \times (\vec{x} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}(\vec{x}_o).$$



Im Integral steht ein (Tensor-)Produkt aus Stromdichte und Ortsvektor. Dieses Integral kennen wir bereits. Es führt aufs magnetische Moment.

$$
\begin{aligned}
F_i &= \frac{1}{c}\int d^3x\, \epsilon_{ikl} j^k(\vec{x}) x^m (\partial_m B^l)(\vec{x}_o) = \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{2c}\int d^3x\, \epsilon_{ikl}\big(j^k(\vec{x})x^m - j^m(\vec{x})x^k\big)(\partial_m B^l)(\vec{x}_o) = \\
&= \frac{1}{2c}\int d^3x\, \underbrace{\epsilon_{kli}\epsilon^{kmn}}_{\delta_l^m\delta_i^n - \delta_l^n\delta_i^m}\, \epsilon_{rsn} j^r(\vec{x}) x^s (\partial_m B^l)(\vec{x}_o) = \\
&= \frac{1}{2c}\int d^3x \Big(\big(\vec{j}(\vec{x})\times\vec{x}\big)_i \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})(\vec{x}_o)}_{=0} \\
&\qquad - \big(\vec{j}(\vec{x})\times\vec{x}\big)_l (\partial_i B^l)(\vec{x}_o)\Big).
\end{aligned}
$$



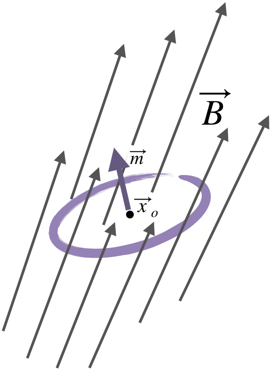
Es wirkt also auf einen magnetischen Dipol im Magnetfeld die Kraft mit zugehörigem Potential U:

$$
\boxed{\vec{F} = \frac{1}{c}\vec{\nabla}\left(\vec{m}\cdot\vec{B}\right)\Big|_{\vec{x}_o}, \quad \vec{F} = -\vec{\nabla}U, \quad U = -\frac{1}{c}\vec{m}\cdot\vec{B}.}
$$

Intuition: Der Dipol will sich entlang von $\vec{B}$ ausrichten und sich ins stärkere $\vec{B}$-Feld bewegen.

Auf die selbe Art bestimmen wir das auf einen magnetischen Dipol wirkende Drehmoment $\vec{N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{L}$.

$$\vec{N} = \int \vec{x} \times d^3\vec{F} = \frac{1}{c}\int d^3x\, \vec{x} \times \left(\vec{\jmath}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})\right) =$$
$$= \frac{1}{c}\int d^3x\, \vec{x} \times \left(\vec{\jmath}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}_o)\right) + \cdots$$
$$= \frac{1}{c}\int d^3x \Big(\vec{\jmath}(\vec{x})\big(\vec{x} \cdot \vec{B}(\vec{x}_o)\big) - \vec{B}(\vec{x}_o)\big(\vec{x} \cdot \vec{\jmath}(\vec{x})\big)\Big) + \ldots$$



Das Integral vom Tensorprodukt aus Ortsvektor und Stromdichte gibt das magnetische Moment:

$$\int d^3x\, j^l(\vec{x})\, x^m = -\epsilon^{lmk} m_k.$$

Damit insbesondere $\int d^3x\, \vec{x} \cdot \vec{\jmath}(\vec{x}) = 0$.

Es wirkt also auf einen magnetischen Dipol im $\vec{B}$-Feld das Drehmoment

$$\boxed{\vec{N} = \frac{1}{c}\vec{m} \times \vec{B}\Big|_{\vec{x}_o}.}$$

Der Dipolvektor $\vec{m}$ will also parallel zu $\vec{B}$ zu liegen kommen.

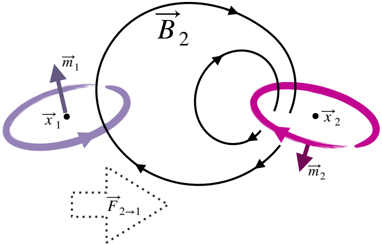
Zum Abschluss bestimmen wir die Kraft $\vec{F}_{2\to1}$, die ein Dipol $(\vec{x}_1, \vec{m}_1)$ im $\vec{B}$-Feld eines zweiten $(\vec{x}_2, \vec{m}_2)$ erfährt.

In guter Näherung ist

$$\vec{F}_{2\to1} = \frac{1}{c}\vec{\nabla}_1\big(\vec{m}_1 \cdot \vec{B}_2(\vec{x}_1)\big)$$

Vektorpotential des Dipolfelds

$$\vec{A}_2(\vec{x}) = -\frac{1}{c}\vec{m}_2 \times \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2|}$$



$\vec{B}$-Feld durch Vektorpotential bestimmt

$$\vec{B}_2(\vec{x}_1) = \vec{\nabla}_1 \times \vec{A}_2(\vec{x}) = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}_1 \times \left(\vec{m}_2 \times \vec{\nabla}_1\frac{1}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\right) =$$

$$= -\frac{1}{c}\left(\vec{m}_2\Delta_1\frac{1}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|} - \vec{\nabla}_1\left(\vec{m}_2 \cdot \vec{\nabla}_1\frac{1}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\right)\right)$$

Da $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$ fällt der erste Term mit dem Laplaceoperator weg. Der Kraftvektor lautet also

$$\vec{F}_{2\to1} = \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}_1\left((\vec{m}_1 \cdot \vec{\nabla}_1)\left(\vec{m}_2 \cdot \vec{\nabla}_1\frac{1}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}\right)\right).$$

In Komponentenschreibweise (mit Summenkonvention) ist das

$$[\vec{F}_{2\to 1}]_i = \frac{1}{c^2} m_1^j m_2^k \partial_i^1 \partial_j^1 \partial_k^1 \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|},$$

wobei hier $\partial_i^1 = \frac{\partial}{\partial x_1^i}$ die Komponenten des Gradientenvektors sind.

Solche Ableitungen sind uns aus der Multipolentwicklung gut bekannt,

$$\begin{aligned}
\partial_i \frac{1}{|\vec{x}|} &= -\frac{x^i}{|\vec{x}|^2},\\
\partial_i \partial_j \frac{1}{|\vec{x}|} &= +\frac{3x_i x_j - \delta_{ij}|\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^5},\\
\partial_i \partial_j \partial_k \frac{1}{|\vec{x}|} &= -\frac{15 x_i x_j x_k - 3|\vec{x}|^2 \big(\delta_{ij} x_k + \delta_{jk} x_i + \delta_{ki} x_j\big)}{|\vec{x}|^7},\\
&\dots
\end{aligned}$$

Die vom 2-ten auf 1-ten Dipol ausgeübte Kraft ist also mit $\vec{x}_{12} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F}_{2\to 1} = \frac{1}{c^2} \frac{15}{|\vec{x}_{12}|^7} \Big(&(\vec{m}_1 \cdot \vec{x}_{12})(\vec{m}_2 \cdot \vec{x}_{12}) \vec{x}_{12} \\
&- \frac{|\vec{x}_{12}|^2}{5} \big((\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2)\vec{x}_{12} + (\vec{m}_2 \cdot \vec{x}_{12})\vec{m}_2 + (\vec{x}_{12} \cdot \vec{m}_2)\vec{m}_1 \big) \Big).\end{aligned}}$$

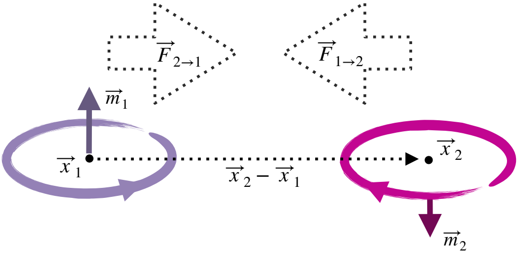
Spezialfall: (anti)-parallele Dipole in selber Ebene

Wir betrachten den Fall, wo beide Dipole entlang der selben Achse ausgerichtet sind und in einer Ebene liegen.

Das bedeutet $\vec{x}_{12} \cdot \vec{m}_1 = 0 = \vec{x}_{12} \cdot \vec{m}_2$ und $\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2 = \pm m_1 m_2$.

In diesem Fall ist die vom 2-ten auf 1-ten Dipol ausgeübte Kraft gerade

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\frac{3}{c^2}\frac{(\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2)\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^5}.$$

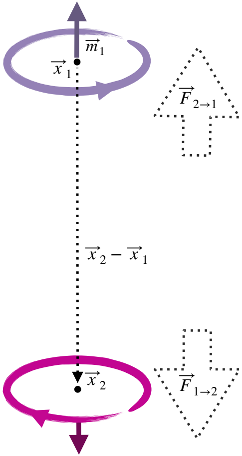


Entgegen orientierte Dipole in einer Ebene ziehen einander an. Gleichzeigende Dipole stoßen einander ab. Die Kraft fällt wie $1/d^4$ ab.

Wir betrachten den Fall, wo beide Dipole auf einer Achse und parallel dazu liegen.

Das bedeutet $\vec{x}_{12} \propto \vec{m}_1 \propto \vec{m}_2$.

In diesem Fall ist die vom 2-ten auf 1-ten Dipol ausgeübte Kraft gerade



$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{12}{c^2} \frac{(\vec{m}_1 \cdot \vec{m}_2)\vec{x}_{12}}{|\vec{x}_{12}|^5}.$$

Entgegen orientierte Dipole auf einer Achse stoßen einander ab. Gleichzeigende Dipole ziehen einander an. Die Kraft fällt wie $1/d^4$ ab.

Faraday’sches Induktionsgesetz

Erster Schritt von statischen Feldern zur Elektrodynamik und den Maxwellgleichungen.

- Eignet sich als Buchbinderlehrling umfassendes Wissen aus den zu bindenden Büchern an.
- Kommt 1813 als Laborgehilfe an die *Royal Institution of Great Britain*. Ab 1825 deren Direktor.
- 1822 erste Mutmaßungen über magnetische Induktion. Durchbruch 1831 bis 1838.
- Grundlegende Beobachtungen: Es wird in einer Leiterschleife ein vorübergehender Strompuls induziert sobald
  1. in einer benachbarten Leiterschleife Ströme an- oder abgeschaltet werden,
  2. eine weitere stromführende Leiterschleife sich relativ zur ersteren bewegt,
  3. ein Permanentmagnet durch die Schleife bewegt wird.

Faraday erklärt Induktion als Folge sich ändernden magnetischen Flusses:

$$\boxed{\text{Zeitliche Änderung des magnetischen Flusses} = \text{Stromtreibende Spannung.}}$$

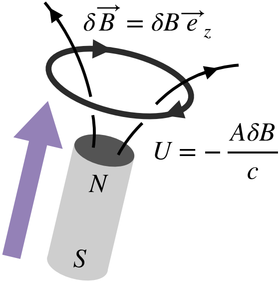
Die Richtung des induzierten Stromes I ist dabei so (Lenz'sche Regel), dass dessen Magnetfeld $\vec{B}_I$ der Änderung $\delta\vec{B}$ des äußeren Magnetfelds entgegenwirkt. D.h. es kostet Arbeit Strom zu erzeugen.

- Magnetischer Fluss durch Leiterschleife $\gamma = \partial f$:

$$\Phi_B[f] = \int_f d^2\vec{S} \cdot \vec{B}.$$

- Stromtreibende Spannung in der Leiterschleife:

$$U_E[\partial f] = -\oint_{\partial f} d\vec{x} \cdot \vec{E}.$$



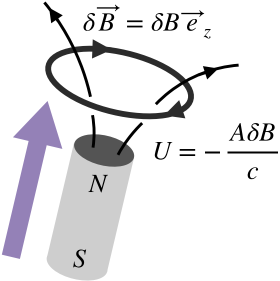
Der mathematische Zusammenhang lautet:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B[f] = -c\,U_E[\partial f].}$$

Wir schränken uns auf den Fall ein, wo wir f festhalten.

- Aus dem Faraday'schen Induktionsgesetz folgt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_B[f] = -c\,U_E[\partial f],$$
$$\int_f d^2\vec{S}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -c\oint_{\partial f} d\vec{x}\cdot\vec{E}.$$



- Mittels Stokes'schem Satz wandeln wir das Zirkulationsintegral in ein Flussintegral um:

$$\int_f d^2\vec{S}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{1}{c}\int_f d^2\vec{S}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}.$$

Da f bebliebig ist, folgt daraus das Faraday'sche Induktionsgesetz in differentieller Form:

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}.}$$

Energie im magnetostatischen Feld

Betrachte eine Verteilung $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ von Leiterschleifen mit Strömen $I_1, \ldots, I_N$. Was ist die Energie W im resultierenden Magnetfeld?

- Beachte dazu zunächst die in einer Zeitspanne δt geschehende Änderung von $\delta\vec{B}$ und δW.
- Wenn sich das Magnetfeld in einer Zeitspanne δt um ein Inkrement $\delta\vec{B}$ ändert, induziert dies eine Spannung $U_i^{ind.}$ in den Leitern:

$$U_i^{ind.}\delta t = -\frac{1}{c}\int_{f_i} d^2\vec{S}\cdot\delta\vec{B}, \qquad \gamma_i = \partial f_i.$$

- Gegen diese Spannung ist Arbeit δW zu verrichten um das Magnetfeld aufzubauen:

$$\delta W = -\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{N} I_i U_i^{ind.}\delta t.$$

- Das $\vec{B}$-Feld lässt sich als Rotation des Vektorpotentials schreiben,

$$\delta W = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{N} I_i\int_{f_i} d^2\vec{S}\cdot\delta\vec{B} = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{N} I_i\int_{f_i} d^2\vec{S}\cdot\big(\vec{\nabla}\times\delta\vec{A}\big).$$

Wir wollen nun Schritt für Schritt den Ausdruck integrieren, also aus δW die Arbeit W erhalten.

- Mittels Stokes'schem Satz folgt zunächst:

$$\delta W = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{N} I_i \int_{f_i} d^2\vec{S}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\delta\vec{A}\right) = \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{N} I_i \int_{\partial f_i} d\vec{x}\cdot\delta\vec{A}$$

- Für eine kontinuierliche Stromverteilung wird daraus mit dem Ausdruck für $\vec{A}(\vec{x})$ in Abhängigkeit von $\vec{\jmath}$, dass:

$$\delta W = \frac{1}{c}\int d^3x\,\vec{\jmath}\cdot\delta\vec{A} = \frac{1}{c^2}\int d^3x \int d^3x'\,\frac{\vec{\jmath}(\vec{x})\cdot\delta\vec{\jmath}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}.$$

- Dieser Ausdruck lässt sich leicht integrieren:

$$W = \frac{1}{2c^2}\int d^3x \int d^3x'\,\frac{\vec{\jmath}(\vec{x})\cdot\vec{\jmath}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{2c}\int d^3x\,\vec{\jmath}\cdot\vec{A}.$$

Zu allerletzt eliminieren wir die Stromverteilung aus der Gleichung für die im Magnetfeld enthaltenen Arbeit.

- Wir verwenden dazu die Feldgleichung des magnetischen Feldes in Abhängigkeit der Stromdichte.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{\jmath}.$$

- Mittels Gauß'schem Satz ergibt sich nun für W:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int d^3x \, (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \, \epsilon^{ijk} \partial_i B_j A_k = \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3x \, \epsilon^{ijk} B_j \partial_i A_k = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \, B_j B^j. \end{aligned}$$

- Wir erhalten also:

$$\boxed{W = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \, |\vec{B}|^2.}$$

- Die Energie im magnetischen Feld ist also positiv und verschwindet genau dann wenn $\vec{B} = 0$. Wir erhielten den die selbe Form für die im elektrischen Feld gespeicherte Arbeit: $W = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \, |\vec{E}|^2$.

Spulen und Leiterschleifen spielen für elektrostatische Felder die selbe Rolle, die Kondensatoren für elektrostatische Felder haben. Spulen sind Energiespeicher. Den Kapazitäten von Kondensatoren entsprechen die Induktivitäten von Spulen und Leiterschleifen.

Eine kurze Rechnung gibt für N Spulen $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ mit Strömen $I_1, \ldots I_N$:

$$W = \frac{1}{2c^2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\vec{\jmath}(\vec{x}) \cdot \vec{\jmath}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{2c^2} \sum_{i=1}^{N} I_i^2 L_i + \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} M_{ij} I_i I_j.$$

Wobei wir folgende Größen eingefügt haben:

$$\text{Selbstinduktivitäten:} \quad L_i = \oint_{\gamma_i} \oint_{\gamma_i} \frac{d\vec{x} \cdot d\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|},$$

$$\text{Gegeninduktivitäten:} \quad M_{ij} = \oint_{\gamma_i} \oint_{\gamma_j} \frac{d\vec{x} \cdot d\vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Ausblick und Zusammenfassung

Zusammenfassung

Wir diskutierten folgende wissenschaftliche Entdeckungen:

1. In niedrigster Ordnung sind zeitunabhängige Magnetfelder Dipolfelder.
2. Das zugehörige magnetische Dipolmoment $\vec{m}$ ist das Volumsintegral über die Magnetisierung $\vec{M}$. Die Magnetisierung ist eine gewichtete Summe über die Drehimpulsvektoren der Ladungsträger. Der Gewichtungsfaktor ist die spezifische Ladung.
3. In äußeren Magntefeldern wirken Kraft und Drehmoment auf magnetische Momente.
    - Magnetische Momente richten sich entlang der Magnetfeldlinien aus.
    - Die Kraft zwischen magnetischen Dipolen fällt wie $1/\mathrm{Abstand}^4$ ab.
    - Parallel ausgerichtete Dipole auf einer Achse ziehen einander an.
    - Parallel ausgerichtete Dipole in einer Ebene stoßen einander ab.
4. Das magnetische Feld hat eine Energiedichte $\varepsilon(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi}|\vec{B}|^2$.
5. Die im magnetischen Feld enthaltene Energie wächst linear mit den Induktivitäten und quadratisch mit den Strömen.

Ausblick

Ausblick: In der nächsten Vorlesung vollenden wir den Schritt zur Elektrodynmaik und führen die Maxwellgleichungen ein.

Elektrische und magnetische Felder bilden eine dynamische Einheit, das *elektromagnetische Feld*.

Wir werden sehen, dass die elektrischen und magnetischen Felder nicht nur eine lokale Energiedichte besitzen, sie tragen auch Impuls und Drehimpuls.