

## Übungen zur Vorlesung Elektrodynamik für Lehramt

## 9. Übungszettel

**Aufgabe 9.1: Hohlraumresonator (Hausübung).** Betrachten Sie einen rechtwinkligen Kasten mit Breite  $a$ , Höhe  $b$  und Länge  $d$ . Die Wände des Kastens seien aus idealen Leitern. Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes an die sechs Wände werden also verschwinden. Wir legen den Kasten in ein kartesisches Koordinatensystem, so dass das Innere des Kastens durch den Bereich  $B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < d\}$  gegeben ist.

Lösen Sie die Vakuummaxwellgleichungen im Innern des Kastens für eine elektromagnetische Welle mit Frequenz  $\omega$  zu den gegebenen Randbedingungen. Es ist also z.B. für die in den  $x$ - $y$ -Ebenen liegenden Komponenten des  $\vec{E}$ -Felds

$$E_x(t, x, y, 0) = 0, \quad E_x(t, x, y, d) = 0, \quad E_y(t, x, y, 0) = 0, \quad E_y(t, x, y, d) = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Frequenz  $\omega$  nur folgende diskrete Werte annehmen kann

$$\omega_{\ell, m, n} = \pi c \sqrt{\left(\frac{\ell}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{d}\right)^2}, \quad \ell, m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Hinweis: Gehen Sie von einem Produktansatz aus und schreiben Sie das  $\vec{E}$ -Feld in folgender Form

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \cos(\omega(t - t_0)) \begin{pmatrix} f_x(x)g_x(y)h_x(z) \\ f_y(x)g_y(y)h_y(z) \\ f_z(x)g_z(y)h_z(z) \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie nun  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  sowie  $\square \vec{E} = (-c^{-1} \partial_t^2 + \Delta) \vec{E} = 0$ . Das  $\vec{B}$ -Feld berechnen Sie nicht, da es sich aus  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{B}$  unmittelbar ergibt.

**Aufgabe 9.2: Paraxialnäherung und Lasermoden (Präsenzübung).** Ebene Wellen sind unrealistisch, da sie unendlich ausgedehnt sind. In dieser Übung wollen wir ein realistisches Modell eines Lichtstrahls im Vakuum finden. Das Modell beschreibt in guter Näherung Laserlicht.

Wir betrachten dazu einen Laser mit fester Frequenz  $\omega$ . Der Laserstrahl breite sich entlang der positiven  $z$ -Richtung aus und bleibe über eine lange Strecke eng fokussiert. Mit der Zeit wird der Strahl aber auseinanderlaufen. Mathematisch drückt sich dieser Sachverhalt darin aus, dass die Fouriermoden  $e^{\mp i\omega t \pm i\vec{k} \cdot \vec{x}}$  des Laserlichts einen Wellenzahlvektor  $\vec{k}$  besitzen, der in guter Näherung in die  $z$ -Richtung zeigen wird. Jeder dieser Wellenzahlvektoren wird aber auch  $k_x$  und  $k_y$  Komponenten haben, die zwar klein gegen  $k_z$ , aber nicht ganz zu vernachlässigen sind.

- Begründen Sie, warum die  $z$ -Komponente von  $\vec{k}$  in guter Näherung durch  $k_z = \frac{\omega}{c}$  gegeben ist.
- Ausgehend von dieser Überlegung motivieren Sie nun für einen sich in die positive  $z$ -Richtung ausbreitenden Strahl folgenden Ansatz für das  $\vec{E}$ -Feld

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = e^{-i\omega t + i\frac{\omega}{c}z} \vec{\Psi}(z, x, y) + e^{+i\omega t - i\frac{\omega}{c}z} \vec{\Psi}^*(z, x, y) \equiv e^{-i\omega t + i\frac{\omega}{c}z} \begin{pmatrix} \Psi_1(x, y, z) \\ \Psi_2(x, y, z) \\ 0 \end{pmatrix} + \text{cc.},$$

wobei cc. das komplex konjugierte der davor stehenden Terms bezeichne, d.h.  $\vec{\Psi}$  ist komplex.

- (c) Wir wollen nun außerdem annehmen, dass die *Einhüllende*  $\vec{\Psi}$  (und deren erste Ableitung) über eine Wellenlänge  $\lambda = 2\pi\omega c$  nur langsam oszillieren. Unter dieser Annahme gilt

$$\frac{\omega}{c} |\partial_z \Psi_1| \gg |\partial_z^2 \Psi_1|, \quad \frac{\omega}{c} |\partial_z \Psi_2| \gg |\partial_z^2 \Psi_2|.$$

Leiten Sie unter der genannten Annahme aus den Maxwellgleichungen folgende Differentialgleichung für  $\vec{\Psi}$  her:

$$-i\partial_z \vec{\Psi} \approx \frac{c}{2\omega} (\partial_x^2 + \partial_y^2) \vec{\Psi}. \quad (*)$$

- (d) Vergleichen Sie diese Gleichung mit der Schrödingergleichung der Quantenmechanik. Was wissen Sie über das qualitative Verhalten anfangs lokalisierter Gauß'scher Wellenpakete (kohärenter Zustände) in der Quantenmechanik für späte Zeiten? Was können Sie daraus über das Ausbreitungsverhalten eines anfangs scharf fokussierten Laserstrahls schließen?
- (e) Wir wollen nun unsere Intuition mathematisch untermauern. Wir gehen dazu von folgendem Produktansatz aus und beschränken uns auf nur eine Komponente von  $\vec{\Psi}$ ,

$$\Psi_1(x, y, z) = f_z(x)g_z(y).$$

Im folgenden diskutieren wir  $f_z(x)$  (die anderen Komponenten können ganz analog behandelt werden). Betrachten Sie nun ein Gauß'sches Paket

$$f_z^{(0)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sigma(z)} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2(z)}}. \quad (**)$$

Zeigen Sie, dass aus (\*) mit dem Ansatz (\*\*), eine Differentialgleichung für  $\sigma(z)$  folgt, deren allgemeine Lösung gegeben ist durch:

$$\sigma^2(z) = \sigma_o^2 + \frac{i c}{\omega} (z - z_o).$$

Skizzieren Sie  $|f_z^{(0)}(x)|$  für  $z \rightarrow \pm\infty$ . Was ist die Bedeutung von  $\frac{\sigma_o}{|\sigma(z)|^2}$  für (\*\*)?

- (f) Zeigen Sie, dass folgende Funktionen (*Hermite-Gauß'sche Moden*) auch Lösungen von (\*) sind:

$$f_z^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger(z))^n f_z^{(0)}(x),$$

wobei  $\hat{a}^\dagger(z)$  folgenden Differentialoperator bezeichne:

$$\hat{a}^\dagger(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x}{\sigma_o} - \left( \sigma_o - i \frac{c}{\sigma_o \omega} (z - z_o) \right) \frac{d}{dx} \right).$$

*Hinweis:* Berechnen Sie die partielle  $z$ -Ableitung  $-i\partial_z \hat{a}^\dagger(z)$  sowie den Kommutator  $\frac{c}{2\omega} [\partial_x^2, \hat{a}^\dagger(z)]$ . Wenn Sie in der Übung noch Zeit haben, können Sie zum Abschluss  $f_z^{(n)}(x)$  durch die Hermitepolynome  $H_n(x) = (2x - \frac{d}{dx})^n 1$  ausdrücken.