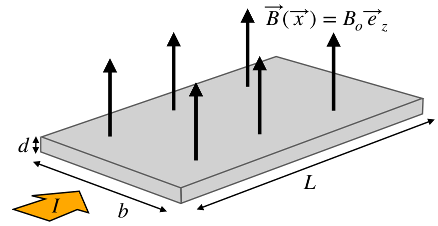
Wolfgang Wieland, 2023

Übungen zur Vorlesung Elektrodynamik für Lehramt

7. Übungszettel

***Aufgabe 7.1:** (Wiederholungen)* Besprechen Sie die Lösungen jener Aufgaben, für die in den letzen Übungen keine Zeit war.

***Aufgabe 7.2:** Halleffekt (Hausübung).* In dieser Übung wollen wir den Halleffekt besprechen. Der Effekt beschreibt das Entstehen einer konstanten Hallspannung in einem stromdurchflossenen Leiter, der sich in einem stationären magnetischen Feld befindet. Wir untersuchen den Effekt in einem dünnen Leiter mit Dicke d, Breite b und Länge L.



Durch den Leiter gehe ein Strom I, das konstante Magnetfeld stehe senkrecht auf den Leiter.

(a) Wir legen den Leiter in die x-y-Ebene, so dass der Strom I entlang der x-Richtung fließt. Das Magnetfeld zeige in die positive z-Richtung $\vec{B}(\vec{x}) = B_o\vec{e}_z$, $B_o > 0$. Der Strom bestehe aus *positiv* geladenen Ladungsträgern mit gleicher Ladung q. Wir nehmen außerdem an, dass sich alle Ladungsträger in guter Näherung mit Geschwindigkeit v_o in die x-Richtung bewegen. In welche Richtung werden die Ladungsträger abgelenkt? In welche Richtung würden die Ladungsträger abgelenkt, wenn diese negativ geladen wären (wie Elektronen)? Beachten Sie dazu für $\vec{v} = v_o\vec{e}_x$ den Ausdruck für die Lorentzkraft:

$$\vec{F}_{Lorentz} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}.$$

(b) Durch die Lorentzkraft werden sich Ladungen an einer der beiden langen Kanten des Leiters ansammeln. Die so auftretende Trennung der Ladungsträger zwischen der linken und der rechten Kante erzeugt ein elektrisches Feld entlang der y-Achse. Das geht so lange bis sich schließlich ein Gleichgewichtszustand ergibt. Im Gleichgewicht hebt sich die so entstehende Coulombkraft gegen die durch das konstante Magnetfeld erzeugte Lorentzkraft auf, d.h.

$$qE_y - q\frac{v_o}{c}B_o = 0.$$

Bestimmen Sie die so entstehende Hallspannung

$$U_{Hall} = E_y\, b.$$

(c) Zwischen Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x})$ der Ladungsträger, deren Teilchenzahldichte $n(\vec{x})$ und der Stromdichte $\vec{\jmath}(\vec{x})$ besteht die Identität $\vec{\jmath}(\vec{x}) = qn(\vec{x})\vec{v}(\vec{x})$. Im hier betrachteten Leiter sei die Dichte der Ladungsträger konstant, $n = n(\vec{x})$. Begründen Sie nun folgenden Zusammenhang zwischen dem Flächeninhalt der stromdurchflossenen x-y-Seite des Leiters und dem angelegten Strom:

$$\frac{I}{bd} = qnv_o.$$

(d) Eliminieren Sie in dem oben gefundenen Ausdruck für die Hallspannung die Geschwindigkeit der Ladungsträger und ersetzen Sie diese durch im Experiment leichter bestimmbare Größen: die angelegte Stromstärke I, die Dicke des Leiters d und die Hallkonstante

$$A_{Hall} = \frac{1}{ncq}.$$

Aufgabe 7.3: *Einschaltvorgang (Präsenzübung).* Zwischen der Induktivität L einer Leiterschleife, dem durch sie fließenden Strom I und dem so entstehenden magnetischen Fluss Φ durch die Schleife besteht folgender Zusammenhang:

$$\Phi = IL.$$

Gemäß Faraday'schem Induktionsgesetz induziert ein zeitabhängiger Strom $I(t)$ eine Spannung $U_{ind}(t)$ in der Schleife, die entsprechend der Lenz'schen Regel der Stromänderung entgegenwirkt. Die funktionale Abhängigkeit lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = \dot{I}(t)L = -c\,U_{ind}(t), \qquad \text{(Faraday'sches Induktionsgesetz).} \tag{$*$}$$

Die Leiterschleife habe außerdem einen festen Ohm'schen Widerstand R. Für $t < 0$ fließe kein Strom durch die Schleife. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde die Leiterschleife mit einer Batterie verbunden, die eine feste Spannung U_o liefert. Es wird sich dann mit der Zeit ein Strom $I(t)$ aufbauen. *Wie lautet $I(t)$ als Funktion von t?*

<u>*Hinweis 1:*</u> Zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ liegt an der Leiterschleife eine Spannung $U(t)$ an, die sich aus der Differenz der fest angelegten stromtreibenden Spannung U_o der Batterie und der durch die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses induzierten Spannung $U_{ind}(t)$ zusammensetzt. Diese Tatsache lässt sich mit ($*$) in folgenden mathematischen Ausdruck verwandeln:

$$I(t)R = U(t) = U_o - U_{ind}(t) = U_o - \frac{L}{c}\dot{I}(t).$$

Wir haben also folgende Differentialgleichung für $I(t)$ und $t > 0$ zu lösen und zwar zum Anfangswert $I(t = 0) = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I(t) = \frac{c}{L}U_o - \frac{cR}{L}I(t)$$

<u>*Hinweis 2:*</u> Verwenden Sie die Methode der *Variation der Konstanten* um $I(t)$ zu finden.