Wolfgang Wieland, 2023

Übungen zur Vorlesung Elektrodynamik für Lehramt

4. Übungszettel

***Aufgabe 4.1:** Dipol und Quadrupol.* Betrachten Sie zwei gegensätzlich geladene Punktteilchen an Orten $\vec{x}_\pm = \pm\varepsilon\vec{e}_z$. Bestimmen Sie zunächst das Coulomb-Potential $\phi_{\varepsilon,q}(\vec{x})$ der zugehörigen Ladungsverteilung

$$\varrho(\vec{x}) = q\Big(\delta(\vec{x}-\vec{x}_+) - \delta(\vec{x}-\vec{x}_-)\Big). \tag{1}$$

Wir bringen die beiden Ladungen nun immer näher zusammen, d.h. wir lassen den Abstand 2ε zwischen den Teilchen gegen null gehen. Gleichzeitig wollen wir jedoch das *Dipolmoment* $2q\varepsilon = p$ fest halten. Zeigen Sie, dass im Limes $\varepsilon \to 0$ das Coulombpotential dieses *Dipolfelds* die folgende Form annimmt

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\phi_{\varepsilon,q} = p\frac{\vec{e}_z\cdot\vec{x}}{|\vec{x}|^3}. \tag{2}$$

Im Gegensatz zu einem isolierten Punktteilchen, fällt das Potential nun also wie $1/r^2$ statt $1/r$ im Unendlichen ab. Den gleichen Gedankengang wiederholen wir nun mit zwei gegensätzlich orientierten Dipolen, d.h. einem Quadrupol. Wir betrachten also Ladungen $\pm q$ an den Orten

$$\vec{x}_\pm = \vec{e}_\pm, \quad \vec{y}_\pm = -\vec{e}_\pm, \quad \text{für} \quad \vec{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm 1\\ 0\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Bestimmen Sie das Coulombpotential der zugehörigen Ladungsverteilung

$$\varrho(\vec{x}) = q\Big(\delta(\vec{x}-\vec{x}_+) - \delta(\vec{x}-\vec{x}_-) + \delta(\vec{x}-\vec{y}_+) - \delta(\vec{x}-\vec{y}_-)\Big). \tag{4}$$

Wie zuvor betrachten wir nun das Potential im Limes, wo ε gegen null geht, jedoch das *Quadrupolmoment* $Q = 6q\varepsilon^2$ konstant gehalten wird. Bestimmen Sie das Coulompotential in diesem Limes. Benützen Sie dazu die Taylorreihe

$$\phi(\vec{x}+\vec{\varepsilon}) = \phi(\vec{x}) + (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\nabla})\phi(\vec{x}) + \frac{1}{2}(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\nabla})^2\phi(\vec{x}) + \frac{1}{3!}(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\nabla})^3\phi(\vec{x}) + \cdots \tag{5}$$

***Aufgabe 4.2:** Dünner geladener Ring.* Betrachten Sie einen unendlich dünnen Ring mit Radius a und gleichmäßig darauf verteilter Ladung q, der in der $z = 0$ Ebene liegt. Rotationen um die z-Achse erhalten diese Ladungsverteilung. In der Vorlesung sahen wir, dass die allgemeine Lösung für das elektrostatische Potential einer solchen Ladungsverteilung in einer Umgebung mit Azimuthalsymmetrie durch folgende Gleichung gegeben ist

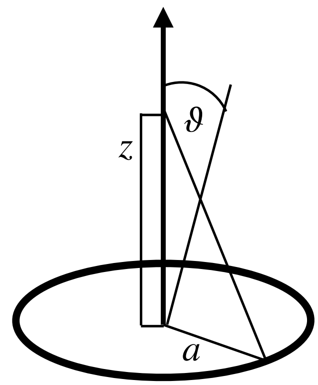
$$\phi(r,\xi) = \sum_{l=0}^{\infty}\Big(A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\Big)P_l(\xi), \tag{6}$$

wobei A_l und B_l zu bestimmende Konstante sind, $r = |\vec{x}|$ die übliche radiale Koordinate ist und $\xi = \cos\vartheta$ die verbleibende Winkelvariable bezeichnet. Außerdem sind $P_l(\xi)$ die Legendrepolynome, die über folgende Entwicklung definiert sind

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\xi}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\xi). \tag{7}$$

Zeigen Sie zunächst, dass mit dieser Normierung sofort folgt, dass $P_l(\xi=1)=1$.

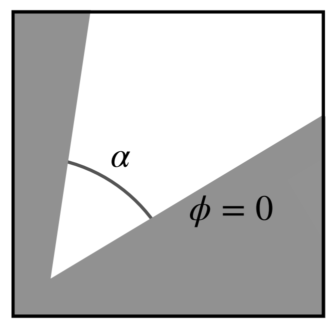
Der Wert des Potentials entlang der z-Achse lässt sich bestimmen, indem die Symmetrie des zugrundeliegenden Problems berücksichtigt wird. Erläutern Sie auf diese Weise, wieso entlang der positiven z-Achse, das Potential durch den Ausdruck



$$\phi(z,1) = \frac{q}{\sqrt{z^2+a^2}} \tag{8}$$

gegeben sein muss. Entwickeln Sie diesen Ausdruck für $z<a$ und $z>a$ in eine Potenzreihe. Vergleichen Sie diesen Ausdruck mit (6) und bestimmen Sie die Koeffizienten A_l und B_l in den Bereichen $r>a$ und $r<a$.

***Aufgabe 4.3:** Potential und Ladungsdichte an einer zwei-dimensionalen Ecke (Präsenzübung).* Wir betrachten eine zwei-dimensionale Ecke in der x-y-Ebene mit Öffnungswinkel α und Translationssymmetrie entlang z. Bestimmen Sie das Potential und die Ladungsdichte an den geerdeten Wänden der Ecke. Es bieten sich dazu Zylinderkoordinaten an,



$$\vec{x}(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} x(\rho,\varphi,z) \\ y(\rho,\varphi,z) \\ z(\rho,\varphi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Der zugehörige Laplaceoperator ist

$$\Delta\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\phi\Big) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\phi.$$

Betrachten Sie nun den Produktansatz für partikuläre Lösungen,

$$\phi(\rho,\varphi) = R_\nu(\rho)\sin\big(\nu(\varphi-\varphi_o)\big).$$

Bestimmen Sie für festes ν die Integrationskonstante φ_o sowie die Funktion $R_\nu(\rho)$ unter den Randbedingungen $\lim_{\rho\to 0} R_\nu(\rho) = 0$ und $\phi(\rho,0) = \phi(\rho,\alpha) = 0$. Bestimmen Sie für diese Lösung die Ladungsdichte auf der Platte. Beachten Sie dazu, dass der Normalenvektor auf die Eckwände gerade $\frac{1}{\rho}\partial_\varphi\vec{x}$ ist. Diskutieren Sie, wie sich die Ladungsdichte in der Umgebung der Spitze mit dem Öffnugswinkel α ändert. Was geschieht beim Übergang von spitzen zu stumpfen Winkeln α?