Wolfgang Wieland, 2023

Übungen zur Vorlesung Elektrodynamik für Lehramt

3. Übungszettel

Abgabe online bis zum Montag, den 08. Mai 2023

Aufgabe 2.1: *Punktladung vor leitender Platte (Hausübung).* Bestimmen Sie das von einer Ladung q im Abstand a vor einer ebenen Leiterplatte erzeugte elektrische Potential $\phi(\vec{x})$. Die Platte sei geerdet, d.h. auf der Platte gelte die Randbedingung $\phi\big|_{Platte} = 0$. Bestimmen Sie außerdem die induzierte Ladungsdichte σ auf der Platte. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor (Spiegelladungsmethode). Wählen Sie zunächst geeignete Koordinaten, also z.B. Platte befinde sich in der x-y-Ebene am Ort $z = 0$. Die Ladung befinde sich am Ort $\vec{x}_o = a\vec{e}_z$, wobei $\vec{e}_z$ der Einheitsvektor in die x Richtung ist. Im Inneren des Leiters ($z < 0$) gilt $\phi(x, y, z) = 0$. Im Außenraum $z > 0$ setzt sich das Potential aus einer partikulären Lösung zur Ladungsverteilung und einer noch unbekannten homogenen Lösung zusammen,

$$\phi(\vec{x}) = \begin{cases} \phi_{hom}(\vec{x}) + \phi_{part}(\vec{x}) = \phi_{hom}(\vec{x}) + \dfrac{q}{|\vec{x} - a\vec{e}_z|}, & z > 0 \\ 0, \quad \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass die Lösung im Außenraum eindeutig durch Angabe der Randbedingungen und der Ladungsverteilung im Innern bestimmt ist. Können wir die Lösung erraten? Betrachte dazu den folgenden Ansatz. Führe eine fiktive Ladung q' an einem Ort $\vec{x}'$ ein, so dass es vom Standpunkt eines Beobachters im Außenraum ($z > 0$) aussieht, als ob $\phi_{hom}(\vec{x})$ gerade von dieser Ladung erzeugt wird. Wir betrachten also den Ansatz

$$\text{für z>0:} \quad \phi_{hom}(\vec{x}) = \frac{q'}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \tag{2}$$

Wo muss sich diese *Spiegelladung* befinden, damit die Laplacegleichung $\Delta\phi = -4\pi q\delta(\vec{x} - a\vec{e}_z)$ im Außenraum ($z > 0$) nicht verletzt wird? Finden Sie geeignete Werte für q' und $\vec{x}'$ damit die Randbedingung $\phi\big|_{Platte} = 0$ erfüllt ist.

Es bezeichne $\vec{n} = \vec{e}_z$ den Normalenvektor auf die Platte. Bestimmen Sie die induzierte Ladungsdichte $\sigma(x, y)$ auf der Platte. Aus der Vorlesung kennen wir dafür die Formel

$$\sigma(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \lim_{\varepsilon \searrow 0} (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\phi)(x, y, \varepsilon). \tag{3}$$

Benützen Sie Zylinderkoordinaten um die gesamte induzierte Ladung $Q_{Platte} = \int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, \sigma(x, y)$ auf der Platte zu bestimmen.

Aufgabe 2.2: *Kugelkondensator (Hausübung).* Betrachten Sie zwei konzentrisch angeordnete leitende Hohlkugeln mit Radius R_{in} und R_{out}, $R_{in} < R_{out}$. Die äußere Kugel trage die Ladung $Q > 0$, die innere Kugel die Ladung $-Q$. Berechnen Sie das elektrostatische Potential ϕ und das elektrische Feld im Zwischenraum. Die Grundgleichungen der Elektrostatik sind linear, es gilt das Superpositionsprinzip. Erklären Sie, dass sich daraus eine Proportionalität zwischen der Ladung Q und der Potentialdifferenz (der Spannung $U = \big|\phi_{in} - \phi_{out}\big|$) ergeben muss. Bestimmen Sie die zugehörige Proportionalitätskonstante, die sogenannte Kapazität $C = \frac{Q}{U}$.

***Aufgabe 2.3:** Vektoranalysis in Kugelkoordianten (Hausübung).* Betrachten Sie Kugelkoordianten (r, ϑ, φ). Der Zusammenhang zu den üblichen kartesischen Koordinaten lautet

$$\vec{x}(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \vartheta, \varphi) \\ y(r, \vartheta, \varphi) \\ z(r, \vartheta, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $J = (\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi)$, die sich aus den auf die neuen Koordinatenachsen parallel stehenden Vektorfeldern $\vec{e}_r = \partial_r \vec{x}$, $\vec{e}_\vartheta = \partial_\vartheta \vec{x}$, $\vec{e}_\varphi = \partial_\varphi \vec{x}$ zusammensetzt. Zeigen Sie, dass für $r > 0$ und $0 < \vartheta < \pi$ die Jacobi-Matrix eine nicht-verschwindende Determinante hat. Solange die beiden Bedingungen $r > 0$ und $0 < \vartheta < \pi$ erfüllt sind, bildet das Dreibein der Vektorfelder $(\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi)$ also eine Basis an jedem Punkt im Raum. Zeigen Sie, dass es sich um ein rechtshändiges Dreibein handelt. Bestimmen Sie die zugehörige *duale Basis*,

$$\vec{f}^r = \frac{1}{\det(J)} \vec{e}_\vartheta \times \vec{e}_\varphi, \quad \vec{f}^\vartheta = \frac{1}{\det(J)} \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r, \quad \vec{f}^\varphi = \frac{1}{\det(J)} \vec{e}_r \times \vec{e}_\vartheta. \tag{5}$$

Betrachten Sie nun ein in Kugelkoordianten vorgegebenes skalares Feld $\psi(r, \vartheta, \varphi)$. Zeigen Sie, dass der Gradientenvektor folgende Basiszerlegung besitzt,

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{f}^r \partial_r \psi + \vec{f}^\vartheta \partial_\vartheta \psi + \vec{f}^\varphi \partial_\varphi \psi. \tag{6}$$

Wenden Sie nun diese Gleichung nochmals an, um daraus den Ausdruck des Laplaceoperators $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ in Kugelkoordianten zu erhalten.

Bestimmen Sie außerdem den Gradienten der Koordinatenfunktionen r, ϑ, φ. Benützen Sie dazu die Tatsache, dass zwischen den einzelnen Koordinatenfunktionen eines Koordinatensystems keine funktionale Abhängigkeit besteht, dass also $\partial_r r = \frac{\partial r}{\partial r} = 1$, jedoch $\partial_r \vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = 0$, $\partial_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0$ ist.

***Aufgabe 2.4:** Helmholtzzerlegung (Präsenzübung).* Betrachten Sie ein mindestens einmal differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}(\vec{x})$. Zeigen Sie unter Anwendung des Gaußschen Satzes, der Identität $\Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_o|} = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}_o)$ und der Annahme, dass $\vec{V}(\vec{x})$ schneller als $1/r$ abfällt,[1] dass

$$V^i(\vec{x}_o) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \, (\partial^k V^i) \partial_k \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_o|}. \tag{7}$$

Wir verwenden hier die Einstein'sche Summenkonvention und Indexschreibweise für Vektoren und partielle Ableitungen. Über gleichzeitig auftretenden Indices wird summiert. Wir möchten nun in diesem Ausdruck Rotations- und Divergenzterme erzeugen. Zerlegen Sie dazu den Ausdruck $\partial^k V^i$ in zwei Teile

$$\partial^k V^i = (\partial^k V^i - \partial^i V^k) + \partial^i V^k \tag{8}$$

Wir setzten diesen Ausdruck in (7) ein. Der $(\partial^i V^k)$-Anteil hinter der Klammer erzeugt nach zweimaliger partieller Integration, unter Verwendung der Abfallbedingung für $\vec{V}(\vec{x})$ und wegen $\partial^i \partial_k = \partial_k \partial^i$ einen Divergenzterm

$$\frac{1}{4\pi} \int d^3x \, (\partial^i V^k) \partial_k \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_o|} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \, (\partial_k V^k) \, \partial^i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_o|} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x \, (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \, \partial^i \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_o|}. \tag{9}$$

[1] Das bedeutet insbesondere, dass wir im folgenden Oberflächenintegrale der Form $\oint_{S^2} d^2\Omega \, \vec{V}(r, \vartheta, \varphi) \, f(\vartheta, \varphi)$ vernachlässigen können, da sie im Limes $r \to \infty$ verschwinden, wobei hier $f(\vartheta, \varphi)$ für irgendwelche beschränkte Funktionen auf der Sphäre steht.

Die ersten beiden Beiträge in der Klammer in (8) hängen nur von der Rotation des Vektorfeldes ab. Wir erinnern uns dazu an die erste Vorlesung, wo uns folgende Identität begegnet ist,

$$\epsilon^{lki}\epsilon_{lmn} = \delta^k_m\delta^i_n - \delta^i_m\delta^k_n, \tag{10}$$

wobei hier δ^i_j das Kronecker delta ist und

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} = \begin{cases} +1, & (ijk) \text{ ist gerade Permutation von } (123), \\ -1, & (ijk) \text{ ist ungerade Permutation von } (123), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{11}$$

Zeigen Sie unter Verwendung dieser Identität, dass

$$\partial^k V^i - \partial^i V^k = \epsilon^{lki}\epsilon_{lmn}\partial^m V^n = \epsilon^{lki}(\vec{\nabla}\times\vec{V})_l \tag{12}$$

Wir erhalten also die Integralgleichung

$$V^i(\vec{x}_o) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x \Big[\epsilon^{lki}(\vec{\nabla}\times\vec{V})_l\partial_k\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_o|} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{V})\partial^i\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_o|}\Big]. \tag{13}$$

Diese Gleichung besagt, dass das Vektorfeld $\vec{V}(\vec{x})$, falls es zumindest schneller als $1/r$ gegen $r\to\infty$ geht, durch Angabe seiner Rotation und Divergenz bereits vollständig bestimmt ist. Beachten Sie nun, dass in diesem Integral Ableitungen $\partial^k\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_o|} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_o|}$ des Coulombpotentials auftreten. Diese Ableitungen lassen sich unter Anwendung der Identität

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -\frac{\partial}{\partial y^k}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{14}$$

vors Integral schieben. Leiten Sie daraus die Helmholtzzerlegung des Vektorfeldes ab, dass also ein Potential $\phi(\vec{x})$ und ein Vektrofeld $\vec{A}(\vec{x})$ existieren, so dass

$$\vec{V}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi + (\vec{\nabla}\times\vec{A}). \tag{15}$$