Wolfgang Wieland

Übungen zur Vorlesung Elektrodynamik für Lehramt

1. Übungszettel

Aufgabe 1.1: *Einheiten und Größenordnungen (Hausübung).* Das Newton'sche Gravitationsgesetz besagt, dass die zwischen zwei punktförmigen Massen m_1 und m_2 wirkende Anziehungskraft umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands d der zwei Körper von einander ist, d.h.

$$F_{Newton} = \frac{Gm_1m_2}{d^2}, \qquad G \approx 6,674 \times 10^{-11}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}, \tag{1}$$

wobei hier G die Newton'sche Gravitationskonstante sei. Die elektrostatische Kraft zwischen zwei als punktförmig gedachten Ladungen q_1 und q_2 im Abstand d hat eine ähnliche Form,

$$F_{Coulomb} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{d^2}, \tag{2}$$

wobei ε_0 die elektrische Feldkonstante (Permittivität des Vakuums) bezeichne. Zwischen ε_0, der Feinstrukturkonstante $\alpha \approx 1/137$, der elektrischen Elementarladung $e \approx 1,602 \times 10^{-19}\mathrm{C}$, dem Planck'schen Wirkungsquantum $\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34}\mathrm{J\,s}$ und der Lichtgeschwindigkeit $c = 299\,792\,458\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ besteht folgender funktionale Zusammenhang

$$\varepsilon_0 = \frac{e^2}{4\pi\alpha}\frac{1}{\hbar c}. \tag{3}$$

- Überzeugen Sie sich davon, dass der Ausdruck $m_{Planck} := \sqrt{\hbar c/G}$ die physikalische Dimension einer Masse hat. Bestimmen Sie diese sogenannte *Planck-Masse*. Wie groß muss ein kugelförmiges Wassertröpfchen sein, damit dessen Masse gerade m_{Planck} ist?

- Die Ladung des Protons ist gerade die negative Ladung des Elektrons. Betrachten Sie zwei Protonen. Bestimmen Sie den Quotienten $|F_{Newton}/F_{Coulomb}|$ der elektostratischen Abstoßung und der Anziehung aufgrund der Schwerkraft zwischen den Teilchen. Drücken Sie den Quotienten als Funktion der Planckmasse und der Masse des Protons aus, wobei $m_{Proton} \approx 10^{-27}\mathrm{kg}$.

Aufgabe 1.2: *Vektoranalysis (Hausübung).* Die Divergenz $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$ und Rotation $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ eines Vektorfeldes $\vec{V}(\vec{x})$ sind durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{\partial}{\partial x}V^x(\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial y}V^y(\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial z}V^z(\vec{x}), \quad \text{wobei} \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} V^x(\vec{x}) \\ V^y(\vec{x}) \\ V^z(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{pmatrix} \partial_y V^z - \partial_z V^y \\ \partial_z V^x - \partial_x V^z \\ \partial_x W^y - \partial_y W^x \end{pmatrix}. \tag{4}$$

- Die partiellen Ableitungen $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_y = \frac{\partial}{\partial y}$ und $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$ vertauschen. Zeigen Sie, dass die Rotation eines Gradientenvektorfeldes $\vec{V} = \vec{\nabla}U = (\partial_x U, \partial_y U, \partial_z U)^\top$ verschwindet.

- Bestimmen Sie den Gradienten $\vec{\nabla}r$ der radialen Koordinate $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\vec{x}|$. Überzeugen Sie sich davon, dass der Gradient orthogonal auf die $r = \text{const.}$ Flächen steht. Warum ist das keine Überraschung?

- Bestimmen Sie die Divergenz des Einheitsvektorfeldes $\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

- Bestimmen Sie die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{E} = \frac{1}{4\pi}\frac{\hat{x}}{r^2}$. Was geschieht bei $r = 0$? *Hinweis:* Verwenden Sie gegebenenfalls den Gauß'schen Satz um die bei $r = 0$ auftretenden Schwierigkeiten zu diskutieren.

- Bestimmen Sie die Rotation des Vektorfeldes $\vec{B} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$. Was geschieht bei $x = y = 0$? *Hinweis:* Verwenden Sie gegebenenfalls den Stoke'schen Satz um die bei $x = 0 = y$ auftretenden Schwierigkeiten zu diskutieren.

Aufgabe 1.3: *Dirac-Delta-Distribution (Präsenzübung).* Die Dirac Delta-Distrubtion δ ist durch ihre Wirkung $\delta[f] = f(0)$ auf sogenannte Testfunktionen $f(x)$ erklärt. Solche Testfunktionen $f(x)$ sind gewöhnliche Funktionen mit kompaktem Träger, die beliebig oft differenzierbar sind. In der theoretischen Physik schreiben wir die Dirac'sche Delta-Distribution jedoch gern als formales Integral über eine verallgemeinerte Funktion $\delta(x)$, die als Limes von Integralen gewöhnlicher Funktionen aufzufassen ist. Die Dirac-Distribution lässt sich dann durch den regularisierten Ausdruck $\delta[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \delta(x) f(x) := \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta_n(x) f(x)$ ersetzen, wobei $\delta_n(x)$ folgende Eigenschaften hat: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta_n(x) = 1$, $\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = 0$ für $x \neq 0$, $\lim_{n\to\infty} \delta_n(0) = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta_n(x) f(x) = f(0)$. Beispiele solcher Reihen $\delta_n(x)$ sind

- $\delta_n(x) = \begin{cases} n, \text{ für } -\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n}, \\ 0, \text{ überall sonst.} \end{cases}$

- $\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-n^2 x^2}$ (Gauß'sche Darstellung der Delta-Distribution).

Zeigen Sie nun unter Verwendung der Gauß'schen Darstellung folgende Eigenschaften:

- Zunächst, dass (i) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta(x - x_o) f(x) = f(x_o)$, (ii) $\delta(a(x - x_o)) = \frac{1}{|a|}\delta(x - x_o)$, (iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \delta'(x - x_o) f(x) = -f'(x_o)$.

- Zeigen Sie nun, dass in sphärischen Koordinaten (r, ϑ, φ) die drei-dimensionale Dirac Distribution folgende Darstellung besitzt:

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}_o) = \delta(x - x_o)\delta(y - y_o)\delta(z - z_o) = \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\delta(r - r_o)\delta(\vartheta - \vartheta_o)\delta(\varphi - \varphi_o). \qquad (5)$$

  Hiweis: Das Volumselement lautet in sphärischen Koordianten: $d^3x = r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\varphi$.

- Stellen Sie unter Verwendung von geeigneten Koordinatendarstellungen der Dirac-Distribution folgende Ladungsverteilungen als drei-dimensionale Ladungsdichten $\rho(\vec{x})$ dar: (i) eine auf einer sphärischen Schale mit Radius R gleichmäßig verteilte Ladung Q, (ii) Ladungen, die sich auf einem als unendlich gedachten Zylinder mit Radius b mit konstanter Ladungsdichte σ gleichmäßig verteilen, (iii) eine Gesamtlandung Q die sich gleichmäßig über eine runde Scheibe von vernachlässigbarer Höhe und Radius R verteilt.