Inhalt dieser Vorlesung

- Maxwellgleichungen (Zusammenfassung vom letzten Mal)
- Energieerhaltung, weitere Erhaltungssätze
- Ausbreitungsvorgänge und Lichtgeschwindigkeit
- Vektorpotentiale & retardierte Greenfunktion

Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho\,, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}\,, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}$$

Zeitentwicklung

$\rho, \vec{j}$ als Quellen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$

quellfreie Gleichungen

Ladungserhaltung

$$\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0\,,$$

Verschiebestrom

$$\vec{j} = \frac{1}{4\pi}\partial_t\vec{E}$$

Maxwell'schen Verschiebestrom notwendig um Integrabilitätsbedingungen

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0 \qquad (\neq 0 \text{ ohne } \vec{j})$$

zu erfüllen.

In der letzten Vorlesung besprachen wir Impulserhaltung

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{P^k_{mech} + P^k_{EM}}_{\text{Gesamtimpuls in } B}\Big] = \oint_{\partial B} d^2x_j \, T^{jk}$$

$n_j T^{jk}$ ... k-te Komponente des Kraftvektors auf Flächenelement von ∂B ...
... beschreibt also Drücke

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{mech} = \int_B d^3x \, \vec{f}_{mech} = \int_B d^3x \left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}\right)$$ ... Impulsänderung der Materie aufgrund der Lorentzkraft

$$\vec{P}_{EM} = \int_B d^3x \, \vec{G} = \frac{1}{4\pi c}\int_B d^3x \, \vec{E}\times\vec{B}$$ ... Impuls des elektromagnetischen Feldes

$$T^{jk} = \frac{1}{4\pi}\left(E^j E^k + B^j B^k - \frac{1}{2}\delta^{jk}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)\right)$$

T^{ii} ... Strahlungsdruckkomponenten (auf i-te Fläche)
$T^{jk}, j \neq k$ ... Scherungskomponenten

↳ Komponenten des Maxwell'schen Spannungstensors

Energieerhaltung

wechselwirkende (geladene) Teilchen erfahren im elektromagnetischen Feld Änderung ihrer kinetischen Energie. Rate der von den Feldern auf die Materie pro Zeiteinheit übertragenen Energie gibt Leistung:

$$L_{mech} = \vec{F}\cdot\vec{v} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v} =$$

$$= q\,\vec{v}\cdot\vec{E}$$

$$\xrightarrow{\text{Kontinuumslimes}} \int d^3x\; \vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{d}{dt}E_{mech}$$

$$\partial_t u_{mech} = \vec{j}\cdot\vec{E}$$ .... Zeitableitung der Energiedichte der Materie

wir benützen nun die Maxwellgleichungen
um den Ausdruck weiter zu vereinfachen

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}\right)\cdot\vec{E} =$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\vec{E} = \epsilon^{ilm}\partial_i B_l E_m =$$

$$= \epsilon^{ilm}\partial_i(B_l E_m) - \epsilon^{ilm} B_l \partial_i E_m =$$

$$= \vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{E}) + \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) =$$

$$= -\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) - \frac{1}{c}\vec{B}\cdot\partial_t\vec{B} =$$

$$= -\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) - \frac{1}{2c}\partial_t(\vec{B}^2)$$

$$= -\frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) - \frac{1}{8\pi}\partial_t(\vec{E}^2+\vec{B}^2) =$$

$$= \partial_t u_{mech}$$

Wir identifizieren folgende Terme

Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$U = \frac{1}{8\pi}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)$$

Energiestromdichte

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E}\times\vec{B}$$

Erhaltungssatz

$$\partial_t\left(u_{mech} + U\right) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S}$$

Energieerhaltung in kompakten Bereiche

$$E_{mech} = \int_B d^3x \; u_{mech} \quad \ldots.$$

.... kinetische (innere) Energie der Materie

$$E_{EM} = \int_B d^3x \; U = \frac{1}{8\pi}\int_B d^3x \left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \quad \ldots.$$

.... im elektromagnetischen Feld enthaltene Energie

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(E_{mech} + E_{EM}\right) = -\oint_{\partial B} d^2\vec{x} \cdot \vec{S}}$$

$\vec{S}$ ... Poyntingvektor beschreibt Energiefluss zwischen B und dessen Komplement

beachte

$$\vec{S} = c^2 \vec{G}$$

Impulsdichte

Energiestromdichte

Drehimpulserhaltung

$$\vec{N}_{mech} = \int_B d^3x\, \vec{\tau}_{mech} = \frac{d}{dt}\vec{L}_{mech}$$

$$\tau^i_{mech} = \epsilon^i{}_{lm}\, x^l f^m_{mech} =$$

$$= -\epsilon^i{}_{lm}\, x^l \partial_t G^m + \epsilon^i{}_{lm}\, x^l \partial_k T^{km} =$$

$$= -\tau^i_{EM} + \partial_k\left(\epsilon^i{}_{lm}\, x^l T^{km}\right)$$

Drehimpulsstromdichte

$$\mathcal{L}^{ik} = -\epsilon^i{}_{lm}\, x^l T^{km}$$

Drehimpulsdichte

$$L^i_{EM} = \epsilon^i{}_{lm}\, x^l G^m$$

Erhaltungssatz

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(L^i_{mech} + L^i_{EM}\right) = -\oint_{\partial B} d^2x_k\, \mathcal{L}^{ik}}$$

da wir relat. Form des Massenschwerpunkts der Materie noch nicht kennen können

Schwerpunktserhaltung

wir beschränken uns im folgenden auf ein Gebiet, wo $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$

betrachte den Vektor

$$K^i = x^i U - c^2 t G^i \, ; \qquad \vec{S} = c^2 \vec{G}$$

so gilt

$$\partial_t K^i = x^i \partial_t U - c^2 G^i - c^2 t \, \partial_t G^i =$$

$$= - x^i \partial_l S^l - S^i - c^2 t \, \partial_l T^{li} =$$

$$= - \partial_l \left(x^i S^l + t \, T^{li} \right)$$

Schwerpunktstromdichte

$$\mathcal{K}^{il} = x^i S^l + t \, T^{li}$$

Erhaltungssatz

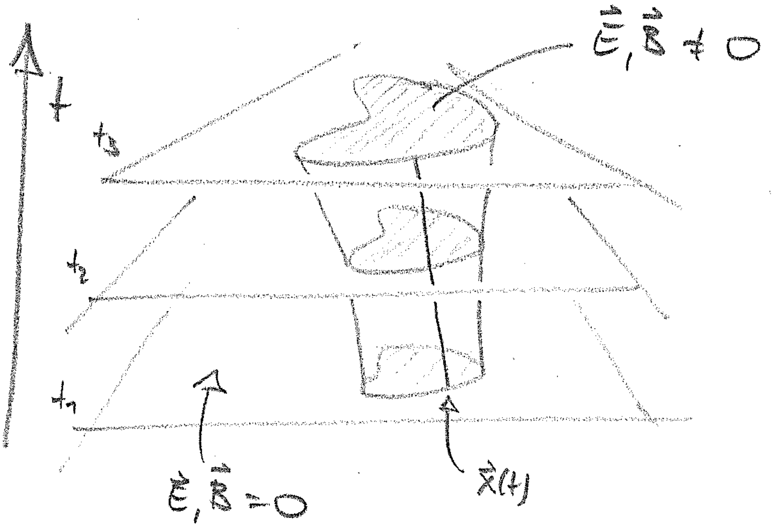
$$\partial_t K^i = - \partial_l \mathcal{K}^{il}$$

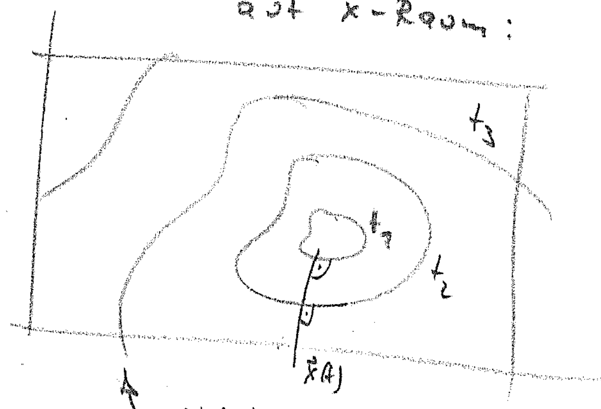
Erhaltungssatz in einem Gebiet B

$$\frac{d}{dt}\int_B d^3x\, K^i = -\oint_{\partial B} d^2x_l\, \mathcal{K}^{il} =$$

$$= -\oint_{\partial B} d^2x_l \left(x^i S^l + t\, T^{li} \right)$$

Ausbreitungsvorgänge und Lichtgeschwindigkeit





für ein auf der Schockwelle (entlang von $\vec{x}(t)$) surfendes Teilchen gilt:

$$\frac{d}{dt} T(\vec{x}(t)) = 1 \, , \text{ da } T(\vec{x}(t)) = t$$

dessen Geschwindigkeitsvektor ist gleich der Geschwindigkeit der Schockwelle

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{x}(t) \sim (\vec{\nabla} T)(\vec{x}(t))$$

es ist nun

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = 1$$

also

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\vec{\nabla} T}{|\vec{\nabla} T|^2}}$$

$\vec{E}$- und $\vec{B}$-Felder besitzen scharfe Unstetigkeiten entlang der Schockwelle

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \vec{E}_0(t,\vec{x})\, \Theta(t - T(\vec{x}))$$
$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \vec{B}_0(t,\vec{x})\, \Theta(t - T(\vec{x}))$$

Wir betrachten solche $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder im ladungsfreien Raum

Außerdem seien $\vec{E}_0(t,\vec{x})$ und $\vec{B}_0(t,\vec{x})$ bereits Lösungen der Vakuum-Maxwellgleichungen im Innern der Schockwelle beachte

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0\,, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}\,, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}$$

aus $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$

$$\vec{E}_0\cdot\vec{v}\,\Big|_{\text{schock}} = 0$$

$\delta(t-T(\vec{x}))$-Terme müssen jeweils für sich verschwinden

aus $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$$\vec{B}_0\cdot\vec{v}\,\Big|_{\text{schock}} = 0$$

aus $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \ldots$

$$\vec{\nabla}T\times\vec{B}_0\Big|_{\text{schock}} = \frac{1}{c}\vec{E}_0\Big|_{\text{schock}}$$

aus $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \ldots$

$$\vec{\nabla}T\times\vec{E}_0\Big|_{\text{schock}} = -\frac{1}{c}\vec{B}_0\Big|_{\text{schock}}$$

wir finden also entlang der Schockwelle sofort daß

$$(i) \quad \vec{v} \perp \vec{E}_0 , \quad \vec{v} \perp \vec{B}_0$$

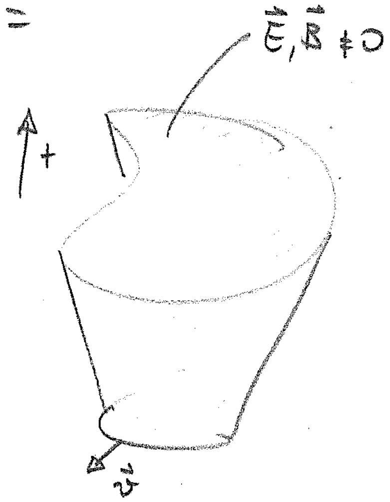
$$(ii) \quad \vec{E}_0 \perp \vec{B}_0$$

außerdem

$$[\vec{\nabla} T \times (\vec{\nabla} T \times \vec{E}_0)]^i = \epsilon^{ilm} \epsilon_{mjk} \partial_l T \partial^j T E_0^k =$$

$$= \partial^i T \partial_l T E_0^l - \partial_l T \partial^l T E_0^i =$$

$$= -(\vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} T) E_0^i$$



also entlang der Schockwelle

$$\vec{\nabla} T \times (\vec{\nabla} T \times \vec{E}_0) = -(\vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} T) \vec{E}_0 =$$

$$= -\frac{1}{c} \vec{\nabla} T \times \vec{B}_0 = -\frac{1}{c} \vec{E}_0$$

damit

$$\boxed{(\vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} T) = \frac{1}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}^2 = c^2}$$

sowie

$$\boxed{|\vec{E}_0| = |\vec{B}_0|}$$ entlang der Schockwelle

Vektorpotentiale und retardierte Greenfunktion

Im Elektro- und Magnetostatik erwiesen sich das Coulomb- und Vektorpotential als nützliche Hilfsgrößen

In der Elektrodynamik lassen sich ebensolche Hilfsfelden $(\phi, \vec{A})$ einführen

betrachte dazu Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \,, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \,, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}$$

aus $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ folgt (mittels Helmholtzzerlegung)

es existiert Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x})$ so daß

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

eindeutig bis auf $\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$

damit

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

also

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} \right) = 0$$

damit existiert ein skalares Potential ϕ so daß

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}}$$

die quellfreien Maxwellgleichungen lassen sich also mittels der Potentiale $(\phi, \vec{A})$ leicht lösen, so daß

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

diese sind bis auf Eichtransformationen

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\partial_t \chi$$
$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$$

eindeutig bestimmt

es bleiben uns die inhomogenen Maxwellgleichungen

beachte dazu

$$[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]^i = \epsilon^{ilm}\, \epsilon_m{}^{rs}\, \partial_l \partial_r A_s =$$
$$= \partial^i(\partial_l A^l) - \Delta A^i$$

also

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\Delta\phi - \frac{1}{c}\partial_t(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) =$$

$$= \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\phi - \frac{1}{c}\partial_t\left(\frac{1}{c}\partial_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) =$$

$$= 4\pi\rho$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{E} =$$

$$= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}(\partial_t\phi) + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} =$$

$$= \left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\partial_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

Wellenoperator

$$\boxed{\Box = -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \Delta}$$

Lorentzeichung: wir wählen Eichtransformation χ, so daß

$$\frac{1}{c}\partial_t \phi' + \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' =$$

$$= -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \chi + \Delta\chi + \frac{1}{c}\partial_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} =$$

$$= \Box\chi + \frac{1}{c}\partial_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \stackrel{!}{=} 0$$

Maxwellgleichungen reduzieren sich auf

$$\boxed{\begin{aligned} \Box\phi &= -4\pi\rho \\ \Box\vec{A} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \end{aligned}}$$

zur Lorentzeichung

$$\boxed{\frac{1}{c}\partial_t\phi + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0}$$

Retardierte (avancierte) Greenfunktion

wir suchen Lösung der Wellengleichung

$$\Box G = -4\pi\, \delta^{(4)} \qquad \delta^{(4)} = \delta(t)\, \delta^{(3)}(\vec{x})$$

hier stünde „+“ für avancierte Greenfunktion

Ansatz

$$G(x,x') = G(x-x') = \frac{\delta\left(t - t' - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{x}'|\right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

so ist

$$\Box G = -4\pi\, \delta^{(4)}(x) +$$

$$+ \frac{\Box\, \delta\left(t - \frac{1}{c}|\vec{x}|\right)}{|\vec{x}|} + 2\, \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \vec{\nabla}\, \delta\left(t - \frac{1}{c}|\vec{x}|\right) =$$

$$= -4\pi\, \delta^{(4)}(x) +$$

$$+ \frac{\delta'\left(t - \frac{1}{c}|\vec{x}|\right) \Box\left(t - \frac{1}{c}|\vec{x}|\right)}{|\vec{x}|} +$$

$$+ \frac{\delta''\left(t - \frac{1}{c}|\vec{x}|\right)\left(-\frac{1}{c^2} + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla}|\vec{x}| \cdot \vec{\nabla}|\vec{x}|\right)}{|\vec{x}|} +$$

$$+ \frac{2}{c} \frac{1}{|\vec{x}|^2}\, \hat{x}^i \partial_i |\vec{x}|\;\; \delta\left(t - \frac{1}{c}|\vec{x}|\right)$$

beachte

$$\Box\left(t-\frac{1}{c}|\vec{x}|\right) = -\frac{1}{c}\Box|\vec{x}| = -\frac{1}{c}\Delta|\vec{x}| =$$

$$= -\frac{1}{c}\partial_i\frac{x^i}{|\vec{x}|} = -\frac{1}{c}\frac{3-1}{|\vec{x}|} = -\frac{2}{c}\frac{1}{|\vec{x}|}$$

also

$$G_{ret}(x,x') = \frac{\delta\left(t-t'-\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

damit für gegebenes $(\rho,\vec{j})$

$$\Box\phi = -4\pi\rho \qquad \Box\phi_{hom} = 0$$

$$\Box\vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \Box\vec{A}_{hom} = 0$$

daß

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(x) &= \int d^3x'\,\frac{\rho\left(t-\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|,\vec{x}'\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \phi_{hom}(x)\\ \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{1}{c}\int d^3x'\,\frac{\vec{j}\left(t-\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|,\vec{x}'\right)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \vec{A}_{hom}(\vec{x})\end{aligned}}$$

beachte außerdem

$$G(x) = \frac{2}{c}\,\Theta(t)\;\delta\!\left(t^2 - \frac{1}{c^2}\,|\vec{x}|\right) \qquad ; \qquad x = (ct, \vec{x})$$

$$G_{ret}(x, x') = G(x - x')$$