Inhalt dieser Vorlesung

- Nachtrag zum letzten Mal
- Maxwellgleichungen
- Erhaltungssätze

Nachtrag und Wiederholung

Faraday'sches Induktionsgesetz

$$\frac{d}{dt}\Phi_B[f] = U_E[\partial f]$$

$$\Phi_B[f] = \int_f d^2\vec{S}\cdot\vec{B}$$

$$U_E[\partial f] = -c\oint_{\partial f} d\vec{x}\cdot\vec{E}$$

differentielle Form

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}}$$

↳ Lenz'sche Regel

Induktivitäten

betrachte N von Strömen $I_1, \dots, I_N$ durchflossene Leiterschleifen $\gamma_1, \dots, \gamma_N$

Wir erhalten für den magnetischen Fluss durch i-te Schleife

$$\Phi_B[f_i] = \int_{f_i} d^2\vec{S} \cdot \vec{B} = \int_{f_i} d^2\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) =$$

$$= \oint_{\partial f_i} d\vec{x} \cdot \vec{A} =$$

$$= \frac{1}{c} \int d^3x' \oint_{\gamma_i} \frac{d\vec{x} \cdot \vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} =$$

$$= \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{N} I_j \oint_{\gamma_i} ds \oint_{\gamma_j} ds' \frac{\frac{d}{ds} x_\mu(s) \frac{d}{ds'} x^\mu(s')}{|\vec{x}(s) - \vec{x}(s')|} =$$

$$= c\, L_i \cdot I_i + c \sum_{j \neq i} M_{ij} I_j$$

$$L_i = \frac{1}{c^2} \oint_{\gamma_i} dx^m \oint_{\gamma_i} dx'_m \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad \ldots \quad \text{Induktivität}$$

der i-ten Schleife

M_{ij} für $i \neq j$: $$M_{ij} = \frac{1}{c^2} \oint_{\gamma_i} dx^m \oint_{\gamma_j} dx'_m \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \ldots$$

.... Gegeninduktivitäten

Fluss

$$\Phi_i^B = c L_i I_i + c \sum_{j: j \neq i} M_{ij} I_j$$

Energie

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \, |\vec{B}(\vec{x})|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} L_i I_i^2 + \sum_{0 \leq i < j \leq N} M_{ij} I_i I_j$$

Maxwellgleichungen

bisher fanden wir

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \quad \ldots \text{ Coulomb}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad \ldots \text{ „Magneto-Gauß"}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad \ldots \text{ Biot-Savart}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c'}\partial_t\vec{B} \quad \ldots \text{ Faraday-Lenz}$$

c, c' hat Einheiten der Geschwindigkeit

Einschub: es ist OBdA $c = c'$:

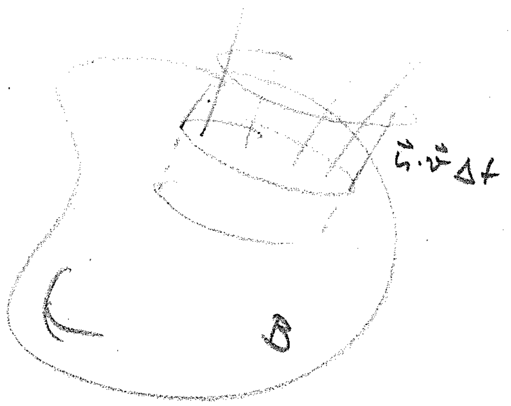
betrachte dazu die Feldredefinition

$\vec{E} \longrightarrow \vec{E}$	$\vec{B} \longrightarrow \frac{1}{\lambda}\vec{B}$
$\rho \longrightarrow \rho$	$c \longrightarrow \lambda c$
$\vec{j} \longrightarrow \vec{j}$	$c' \longrightarrow \frac{1}{\lambda} c'$

also OBdA $c = c'$

Ladungserhaltung

$$\frac{d}{dt}\int_B d^3x\, \rho = -\oint_{\partial B} d^2\vec{S}\cdot\vec{j}$$



$$\boxed{\partial_t \rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$

Es ergibt sich nun ein schwerwiegender theoretischer Widerspruch

Gut getestet, wir wollen diesen Gleichungen trauen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\boxed{\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}$$

beachte dazu die Integrabilitätsbedingungen

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\,, \quad \text{OK}\checkmark$$
$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\frac{4\pi}{c}\partial_t\rho\,, \quad \lightning$$

Ansatz

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j} + \vec{j}_{max})$$

$\vec{j}_{max}$ ... Maxwell'scher Verschiebestrom [Maxwell 1864] beachte

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{max} =$$

$$= -\frac{4\pi}{c}\partial_t\rho + \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{max} =$$

$$= -\frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{4\pi}\partial_t\vec{E} - \vec{j}_{max}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

Maxwell 1864

$$\boxed{\vec{j}_{max} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}}$$

Maxwellgleichungen

Coulomb:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho\,,$$

Magneto-Gauß:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

Biot-Savart-Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}\,,$$

Faraday-Lenz:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}$$

Zeitevolution

Ladungsströme & Dichten

Quellfreie Gleichungen

Kraft auf idealisierte Punktladungen

$$\boxed{\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c}\times\vec{B}\right)}$$

Maxwell 1864: Verschiebestrom &

Vorhersage elektromagnetischen Wellen

Hertz 1867: Experimenteller Nachweis

elektromagnetischen Wellen

Erhaltungssätze

Impulserhaltung

Die mit dem elektromagnetischen Feld wechselwirkenden Teilchen erfahren Impulsänderung. Übertragungsrate der von den Feldern auf Teilchen übermittelten Impulse pro Zeit gibt Kraft

$$\vec{F}_{mech} = \frac{d\vec{p}_{mech}}{dt} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) =$$

$$\xrightarrow{\text{Kontinuum}} \int d^3x \left(\rho \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B}\right) = \int d^3x \, \vec{f}_{mech}$$

$$\vec{f}_{mech} = \frac{d}{dt}\vec{p}_{mech} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B} \ \ldots$$

.... Kraftdichte auf Ladungsträgern

beachte

$$\vec{f}_{mech} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left((\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + (\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}) \times \vec{B} \right)$$

In Komponentenschreibweise

$$f^i_{mech} = \frac{1}{4\pi} \Big(\partial_l E^l E^i + \epsilon^{ijk} (\vec{\nabla} \times \vec{B})_j B_k +$$
$$- \frac{1}{c} \epsilon^{ijk} \partial_t E_j B_k \Big) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \Big(\partial_l E^l E^i + \epsilon^{ijk} \epsilon_j{}^{lm} \partial_l B_m B_k +$$
$$- \frac{1}{c} \epsilon^{ijk} \partial_t (E_j B_k) +$$
$$- \epsilon^{ijk} \epsilon_k{}^{lm} E_j \partial_l E_m \Big) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \Big(\partial_l E^l E^i + \partial_l B^i B^l - \partial^i B_l B^l +$$
$$- \frac{1}{c} \epsilon^{ijk} \partial_t (E_j B_k) +$$
$$- E_l \partial^i E^l + E^l \partial_l E^i \Big)$$

also damit

$$f^i_{mech} = \frac{1}{4\pi}\Big(\partial_l (E^l E^i + B^l B^i) + $$

$$- \frac{1}{2} \partial^i (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \Big) +$$

$$- \frac{1}{4\pi c} \epsilon^{ijk} \partial_t (E_j B_k)$$

wir identifizieren folgende Ausdrücke

Elektromagnetische Impulsdichte

$$\vec{G} = \frac{1}{4\pi c} \vec{E} \times \vec{B}$$

Maxwell'schen Spannungstensor

$$T^{jk} = \frac{1}{4\pi}\left(E^j E^k + B^j B^k - \frac{1}{2}\delta^{jk}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\right)$$

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{E}\otimes\vec{E} + \vec{B}\otimes\vec{B} - \frac{1}{2}\mathbb{1}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\right)$$

wir erhalten also

$$\boxed{f^i_{mech} + \partial_t G^i = \partial_\ell T^{\ell i}}$$

in festem Bereich B

$$\int_B d^3x \left(\vec{f}_{mech} + \partial_t \vec{G} \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \int_B d^3x \left(\vec{p}_{mech} + \vec{G} \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\vec{P}_{mech} + \vec{P}_{EM} \right] = \int_B d^3x \; \partial_j T^{jk} \vec{e}_k =$$

$$= \oint_{\partial B} d^2 S_j \, T^{jk} \vec{e}_k$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left[P^k_{mech} + P^k_{EM} \right] = \oint d^2 S_j \, T^{jk}}$$

Physikalische Interpretation des Maxwell'schen Spannungstensors

beachte Impulserhaltung im Bereiche B

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underbrace{\left[P^k_{mech} + P^k_{EM}\right]}_{\text{Änderung des Gesamtimpulses in } B} = \oint_{\partial B} d^2 S_j \, \underbrace{T^{jk}}_{}}$$

$n_j T^{jk}$ .... k-te Komponente des Kraftvektors pro Flächenelement auf ∂B

$T^{jk} n_j n_k$ ... Strahlungsdruck auf Fläche

T^{ii} .... Druckkomponenten von $\overleftrightarrow{T}$

T^{ij} für $i \neq j$ .... Scherungskomponenten von $\overleftrightarrow{T}$

Energieerhaltung

Wechselwirkende (geladene) Teilchen erfahren im elektromagnetischen Feld Änderung ihrer kinetischen Energie. Rate der von den Feldern auf die Teilchen pro Zeit übertragenen Energie gibt Leistung

$$L_{mech} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{v} =$$

$$= q\,\vec{v} \cdot \vec{E}$$

$$\xrightarrow{\text{Kontinuum}} \int d^3x\, \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{d}{dt} E_{mech}$$

$$\partial_t u_{mech} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Wir identifizieren folgende Terme

Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$U = \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$$

Energiestromdichte

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B} \ \ldots \ \text{Poyntingvektor}$$

Erhaltungssatz

$$\partial_t(u_{mech} + U) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{S}$$

Wir benützen nun die Maxwell-gleichungen um den Ausdruck weiter zu vereinfachen

$$\vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{E}\right)\cdot\vec{E} =$$

$$\boxed{\begin{aligned}
(\vec{\nabla}\times\vec{B})\cdot\vec{E} &= \epsilon^{ilm}\partial_l B_m E_i = \\
&= \epsilon^{ilm}\partial_l(B_m E_i) - \epsilon^{ilm} B_m \partial_l E_i = \\
&= \vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{E}) + \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = \\
&= \vec{\nabla}\cdot(\vec{B}\times\vec{E}) - \frac{1}{c}\vec{B}\cdot\partial_t\vec{B}
\end{aligned}}$$

$$= -\frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) - \frac{1}{8\pi}\partial_t(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) =$$

$$= \partial_t u_{mech}$$

Energieerhaltung im einem endlichen Bereich B

$$E_{mech} = \int_B d^3x \; u_{mech}$$

$$E_{EM} = \int_B d^3x \; U$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(E_{mech} + E_{EM}\right) = -\oint_{\partial B} d^2\vec{x} \cdot \vec{S}}$$

$\vec{S}$... Poyntingvektor der Energiefluss zwischen B und dessen Komplement/Außenraum beschreibt

beachte:

$$\vec{S} = c^2 \; \vec{G}$$

Impulsdichte

Energiestromdichte

Drehimpulserhaltung

Mechanische Drehmomentdichte
auf wechselwirkende Ladungsverteilung:

$$\vec{N}_{mech} = \int_B d^3x \; \vec{\tau}_{mech}$$

$$\tau^i_{mech} = \epsilon^i{}_{lm} x^l f^m_{mech} =$$

$$= -\epsilon^i{}_{lm} x^l \partial_t G^m + \epsilon^i{}_{lm} x^l \partial_k T^{km} =$$

$$= -\tau^i_{EM} + \epsilon^i{}_{lm} \partial_k (x^l T^{km})$$

$\hookrightarrow$ da: $\epsilon^i{}_{km} T^{km} = 0$

also

$$N^i_{mech} + N^i_{EM} = \oint_{\partial B} d^2x_k \, \epsilon^i{}_{lm} x^l T^{km}$$

$$\equiv \oint_{\partial B} d^2x_k \, \mathcal{K}^{ik}$$

wobei

$$N^i_{EM} = \frac{d}{dt} L^i_{EM} \quad \ldots \text{ Drehmoment}$$

$$L^i_{EM} = \int_B d^3x \; \epsilon^i{}_{em} \, x^e \, G^m \quad \ldots \text{ Drehimpuls}$$

$$\mathcal{K}^{ik} = \epsilon^i{}_{em} \, x^e \, T^{km} \quad \ldots\ldots$$

... Drehimpulsstromdichte

Schwerpunktserhaltung

wir beschränken uns im folgenden auf ein Gebiet B wo $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$

betrachte den Vektor

$$K^i = x^i U - c^2 t\, G^i \quad ; \quad \vec{S} = c^2 \vec{G}$$

so gilt

$$\partial_t K^i = x^i \partial_t U - c^2 G^i - c^2 t\, \partial_t G^i =$$

$$= - x^i \partial_\ell G^\ell - S^i - c^2 t\, \partial_\ell T^{\ell i} =$$

$$= - \partial_\ell \left(x^i S^\ell + t\, T^{\ell i} \right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_B d^3x\, K^i = - \oint_{\partial B} d^2x_\ell \left(x^i S^\ell + t\, T^{\ell i} \right)}$$

Wir betrachten den Fall, wo alle Randterme verschwinden, also z.B. kompakte Pulse oder $B \to \mathbb{R}^3$

<u>Energiemittelpunkt des Feldes</u>

$$\langle \vec{x} \rangle_E = \frac{\int d^3x \, \vec{x} \cdot U}{\int d^3x \, U} = \frac{\int d^3x \, \vec{x} \cdot U}{E_{EM}}$$

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{x} \rangle_E = + c^2 \frac{\int d^3x \, \vec{G}}{\int d^3x \, E_{EM}} =$$

$$= c^2 \frac{\vec{P}_{EM}}{E_{EM}}$$

Impulsmittelpunkt und Virialtheorem

Viralsatz der klassischen Mechanik

$$\frac{d}{dt}(\vec{x}\cdot\vec{p}) = 2T + \vec{x}\cdot\vec{F} = 2T - \vec{x}\cdot\vec{\nabla} V$$

$$V \sim \frac{1}{|\vec{x}|} \ ; \ \vec{x}\cdot\vec{\nabla} V = -V$$

zeitliches Mittel

$$2\bar{T} + \bar{V} = 0$$

Viralsatz der Elektrodynamik

lokale Impulserhaltung

$$f^i_{mech} + \partial_t G^i = \partial_l T^{li}$$

für $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$ vereinfacht sich dies zu

$$\partial_t G^i = \partial_l T^{li}$$

wir erhalten also

$$\partial_t (G_i x^i) = \partial_t (\vec{G} \cdot \vec{x}) =$$

$$= \partial_\ell T^{\ell i} x_i = \partial_\ell (T^{\ell i} x_i) - T^\ell{}_\ell =$$

$$= \vec{\nabla} \cdot (\overleftrightarrow{T} \cdot \vec{x}) + U$$

$$\boxed{\partial_t (G_i x^i) = \partial_\ell (T^\ell{}_i x^i) + U}$$

Impulsschwerpunkt

$$\int_B d^3x \; \vec{G} \cdot \vec{x} =: \vec{P}_{EM} \cdot \langle \vec{x} \rangle_P$$

und $\vec{P}_{EM} = \int_B d^3x \; \vec{G}$

also

$$\vec{P}_{EM} \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{x} \rangle_P = E_{EM}$$

für $\frac{d}{dt} \langle \vec{x} \rangle_P = \frac{d}{dt} \langle \vec{x} \rangle_E$ und also

c Ausbreitungsgeschwindigkeit

eines solchen Pulses