Inhalt dieser Vorlesung

- Magnetisches Dipolmoment/
  Magnetisierung
- Kraft und Drehmoment
  auf magnetischen Dipol
- Faraday'sches Induktionsgesetz
- Energie magnetostatischer Feldern,
  magnetische Induktivitäten

Magnetisches Dipolmoment und Magnetisierung

betrachte die Entwicklung für $\frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}|} \ll 1$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} - \vec{x}' \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}|} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x}' \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \ldots$$

also für das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \, \vec{J}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} =$$

$$= \frac{1}{c} \frac{1}{|\vec{x}|} \int d^3x' \, \vec{J}(\vec{x}') +$$

$$+ \frac{1}{c} \frac{1}{|\vec{x}|^3} x^m \int d^3x' \, \vec{J}(\vec{x}') \, x'_m +$$

$$+ \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{x}'|^3}{|\vec{x}|^3}\right)$$

es sei nun $\vec{j}(\vec{x})$ eine aus einzelnen Leiterschleifen zusammengesetzte Stromverteilung in einem Bereiche B, d.h.:

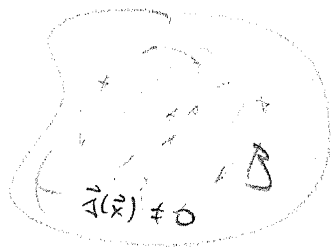
$$\vec{j}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} I_i \oint_{\gamma_i} dt \, \frac{d\vec{x}_i(t)}{dt} \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t))$$

$$\gamma_i \in B$$

jede solche Stromverteilung hat verschwindende Divergenz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) = -\sum_{i=1}^{N} I_i \oint_{\gamma_i} dt \, \frac{d}{dt} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) = 0$$

betrachte nun eine solche isolierte Stromverteilung $\vec{j}(\vec{x})$, d.h.



(i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

(ii) $\vec{j}(\vec{x}) = 0 \;\; \forall \; \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus B$

$\vec{j}(\vec{x}) = 0$

für jedes solche $\vec{j}(\vec{x})$

$$\int d^3x \; \partial_l \left(j^l(\vec{x}) \, x^m \right) =$$

da $j^l(\vec{x}) = 0$ außerhalb von B

$$= \lim_{r \to \infty} \oint_{|\vec{x}|=r} d^2S_l \; j^l(\vec{x}) \, x^m = 0$$

$$= \int d^3x \left(x^m (\partial_l j^l)(\vec{x}) + j^m(\vec{x}) \right) =$$

$$= \int d^3x \; j^m(\vec{x}) \quad ; \quad \text{da} \quad \partial_l j^l = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

also

$$\boxed{\int d^3x \; j^m(\vec{x}) = 0}$$

ebenso

$$\int d^3x \; \partial_l \left(j^l(\vec{x}) \, x^m x^k \right) = \lim_{r \to \infty} \oint_{|\vec{x}|=r} d^2S_l \; j^l(\vec{x}) \, x^m x^k =$$

$$= \int d^3x \left(j^m(\vec{x}) \, x^k + j^k(\vec{x}) \, x^m \right)$$

also

$$\boxed{\int d^3x \left(j^m(\vec{x}) \, x^k + j^k(\vec{x}) \, x^m \right) = 0}$$

wir erhalten damit für das zugehörige Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}|}\overbrace{\int d^3x'\, \vec{j}(\vec{x}')}^{\to\, 0} +$$

$$+ \frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}|^3}\, x^m \int d^3x'\, \vec{j}(\vec{x}')\, x'_m + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{x}'|^3}{|\vec{x}|^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{c}\,\frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{x}'|^3}{|\vec{x}|^3}\right)$$

also

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\,\frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \dots}$$

wir erhalten daraus

$$\int d^3x\, j_l(\vec{x})\, x_m = \frac{1}{2}\int d^3x \left(j_l(\vec{x})\, x_m - j_m(\vec{x})\, x_l \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\, \epsilon_{lm}{}^{k} \int d^3x\, \epsilon_{k}{}^{rs}\, j_r(\vec{x})\, x_s =$$

$$= -\epsilon_{lm}{}^{k}\, m_k$$

wobei $\vec{m}$ das magnetische Moment der Stromverteilung bezeichne

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3x\, \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x})}$$

Zusammenhang zwischen magnetischem Moment und Drehimpuls

betrachte N nicht-relativistische Punktladungen mit Massen $m_1, \dots, m_N$, Ortsvektoren $\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_N(t)$ und Ladungen $q_1, \dots, q_N$

magnetisches Moment

$$\vec{m}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i(t) \times q_i \frac{d\vec{x}_i(t)}{dt} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{m_i} \vec{x}_i(t) \times \left(m_i \frac{d\vec{x}_i(t)}{dt} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{m_i} \vec{x}_i(t) \times \vec{p}_i(t) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{m_i} \vec{L}_i(t)$$

für eine Verteilung gleicher Ladungen

$$\frac{q_i}{m_i} = \frac{q}{m} : \quad \boxed{\vec{m}(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} \vec{L}}$$

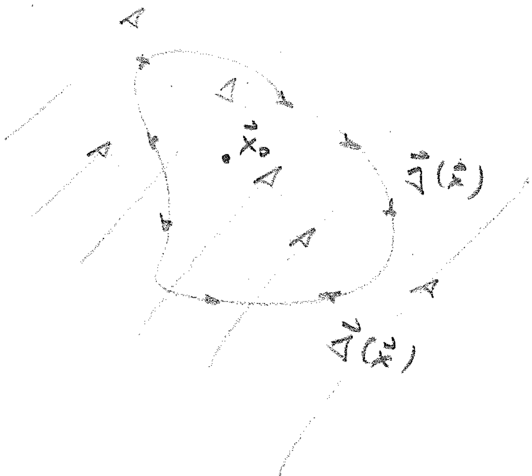
Gesamtdrehimpuls

Kraft und Drehmoment auf magnetischen Dipol $\vec{m}$

betrachte Stromverteilung $\vec{j}(\vec{x})$ in gegebenem Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x})$. Die Kraft die $\vec{B}(\vec{x})$ auf die Stromverteilung ausübt ist (Biot-Savart)

$$\vec{F} = \frac{1}{c}\int d^3x \; \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

<u>Entwicklung um $\vec{x}_0$:</u>



$$F_i = \frac{1}{c}\int d^3x \; \epsilon_{ikl}\, j^k(\vec{x})\, B^l(\vec{x}) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{c}\int d^3x \; \epsilon_{ikl}\, j^k(\vec{x})\, B^l(\vec{x}_0)}_{=0} +$$

$$+ \frac{1}{c}\int d^3x \; \epsilon_{ikl}\, j^k(\vec{x})\, (x^m - x_0^m)\, (\partial_m B^l)(\vec{x}_0) + \ldots$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3x \; \epsilon_{ikl}\, j^k(\vec{x})\, x^m\, (\partial_m B^l)(\vec{x}_0) + \ldots$$

Kraft auf magnetischen Dipol

$$F_i = -\frac{1}{c}\epsilon_{ik\ell}\,\epsilon^{kmj}\, m_j\,(\partial_m B^\ell)(\vec{x}_0) + \ldots =$$

$$= -\frac{1}{c} m_i\,(\partial_m B^m)(\vec{x}_0) + \frac{1}{c} m_\ell\,(\partial_i B^\ell)(\vec{x}_0) + \ldots$$

$\hookrightarrow \epsilon_{k\ell i}\,\epsilon^{kmj} = \delta^m_\ell\,\delta^j_i - \delta^m_i\,\delta^j_\ell$

da $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ folgt weiter

$$\boxed{\vec{F} \approx \frac{1}{c}\vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}) = -\vec{\nabla} U}$$

zugehöriges Potential

$$U(\vec{x}) = -\frac{1}{c}\vec{m}\cdot\vec{B}(\vec{x})$$

Drehmoment auf magnetischen Dipol

$$\vec{N} = \frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \times \vec{F}_i \quad \ldots \text{ Drehmoment}$$

$$\vec{N} = \int \vec{x} \times d\vec{F} = \frac{1}{c}\int d^3x\; \vec{x} \times (\vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})) =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\epsilon^i{}_{\ell m}\,\epsilon^m{}_{rs}\, x^\ell j^r B^s = \\ &= j^i x_\ell B^\ell - B^i x_\ell j^\ell \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3x \left(\vec{j}(\vec{x})\,(\vec{x}\cdot\vec{B}(\vec{x})) - \vec{B}(\vec{x})\,(\vec{x}\cdot\vec{j}(\vec{x}))\right)$$

Entwicklung von $\vec{B}(\vec{x})$ um $\vec{x}_0$

$$N^i \approx \frac{1}{c}\int d^3x \left(j^i(\vec{x})\, x_l - \delta^i_l\, j^k(\vec{x})\, x_k \right) B^l(\vec{x}_0)$$

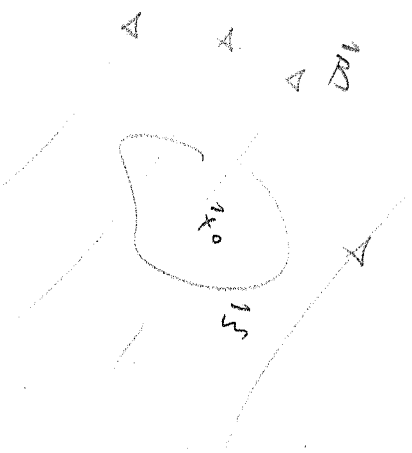
für isolierte Stromverteilung ist:

$$\int d^3x\, j^i(\vec{x})\, x_l = -\epsilon^i{}_{lk}\, m^k$$

damit:

$$N^i \approx \frac{1}{c}\, \epsilon^i{}_{kl}\, m^k B^l(\vec{x}_0)$$

$$\boxed{\vec{N} \approx \frac{1}{c}\, \vec{m} \times \vec{B}(\vec{x}_0)}$$



Kraft zwischen zwei Dipolen

Kraft $\vec{F}_{2\to 1}$ die ein magnetischer Dipol $\vec{m}_1$ am Orte $\vec{x}_1$ im Feld $\vec{B}^{(2)}$ eines zweiten Dipols $(\vec{m}_2, \vec{x}_2)$ erfährt

$$\vec{F}_{2\to 1} = \frac{1}{c} \vec{\nabla}_1 \left(\vec{m}_1 \cdot \vec{B}^{(2)}(\vec{x}_1) \right)$$

$\hat{=}$ in guter Näherung

mit

$$\vec{B}^{(2)}(\vec{x}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}^{(2)})(\vec{x})$$

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \frac{\vec{m}_2 \times (\vec{x} - \vec{x}_2)}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^3} + \ldots$$

beachte

$$\partial_\ell \frac{1}{|\vec{x}|} = -\frac{x_\ell}{|\vec{x}|^3} \quad ; \quad \partial_\ell |\vec{x}| = \frac{x_\ell}{|\vec{x}|}$$

$$\partial_\ell \partial_m \frac{1}{|\vec{x}|} = -\frac{\delta_{\ell m} |\vec{x}|^2 - 3 x_\ell x_m}{|\vec{x}|^5} =$$

$$= \frac{3 x_\ell x_m - \delta_{\ell m} |\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^5}$$

$$\partial_\ell \partial_m \partial_t \frac{1}{|\vec{x}|} = -\frac{15 x_\ell x_m x_t - 3 |\vec{x}|^2 (\delta_{\ell t} x_m + \delta_{t m} x_\ell + \delta_{\ell m} x_t)}{|\vec{x}|^7}$$

also

$$[\vec{F}_{2\to 1}]_i = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_1^i} m_1^\ell B_\ell^{(2)}(\vec{x}_1) =$$

$$= \frac{1}{c} m_1^\ell \epsilon_\ell{}^{rs} \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_1^r} A_s^{(2)}(\vec{x}_1) =$$

$$= -\frac{1}{c^2} m_1^\ell \epsilon_\ell{}^{rs} \epsilon_{sj}{}^t m_2^j \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_1^r} \frac{\partial}{\partial x_1^t} \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} =$$

$$= \frac{1}{c^2} m_1^\ell m_2^t \frac{\partial}{\partial x_1^i} \frac{\partial}{\partial x_1^\ell} \frac{\partial}{\partial x_1^t} \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}$$

damit

$$
\begin{aligned}
\vec{F}_{2\to 1} = -\frac{15}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^7}\Big[& (\vec{m}_1\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2))(\vec{m}_2\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2))(\vec{x}_1-\vec{x}_2) + \\
& -\frac{1}{5}|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2\Big((\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2)(\vec{x}_1-\vec{x}_2) + \\
& \quad + (\vec{m}_2\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2))\,\vec{m}_1 + \\
& \quad + (\vec{m}_1\cdot(\vec{x}_1-\vec{x}_2))\,\vec{m}_2 \Big) \Big]
\end{aligned}
$$

Faraday'sches Induktionsgesetz

- erster Schritt hin zur Elektrodynamik und zeitabhängigen Feldern

- Faraday 1831, drei Beobachtungen:
  Es wird in einer Leiterschleife ein vorübergehender Strompuls induziert sobald:

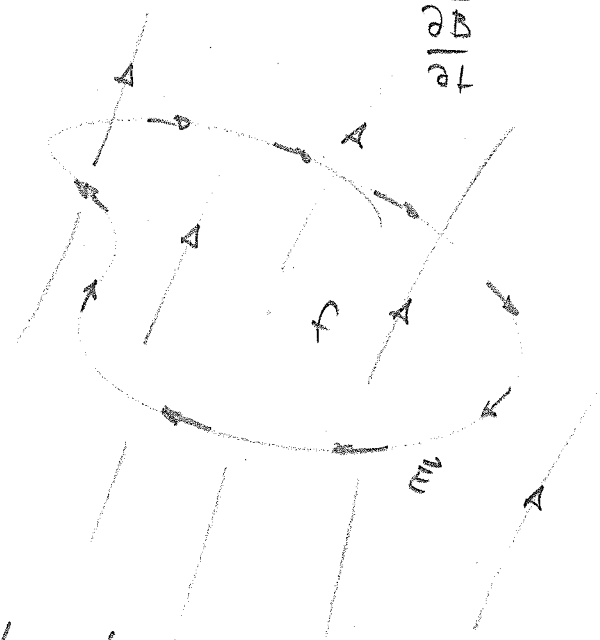
  1. in einer benachbarten Leiterschleife Ströme an- oder abgeschaltet werden
  2. sich diese relativ zu einer stromführenden Leiterschleife bewegt
  3. ein Permanentmagnet durch die Schleife hindurchbewegt wird

Faraday hat dies nun so erklärt

zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch eine Leiterschleife erzeugt darin stromtreibende Spannung

<u>magnetischen Fluss</u>

$$\Phi_B[f] = \int_f d^2\vec{S}\cdot\vec{B}$$



<u>stromtreibende Spannung</u>

$$U_E[\partial f] = -\oint_{\partial f} d\vec{x}\cdot\vec{E}$$

<u>Faraday'sches Induktionsgesetz/Lenz'sche Regel</u>

$$\boxed{\frac{d}{dt}\Phi_B[f] = c\,U_E[\partial f]}$$

also im Spezialfall wo f festgehalten bleibt:

$$\int_f d^2\vec{\zeta} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -c \oint_{\partial f} d\vec{x} \cdot \vec{E} =$$

$$= -c \int_f d^2\vec{\zeta} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E})$$

also (da f beliebig ist)

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}}$$

Energie / Arbeit im magnetischen Felde

betrachte Stromschleifen $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ mit festen Strömen $I_1, \dots, I_N$ und zugehörigem Magnetfeld $\vec{B}$.

beachte dazu zunächst die notwendige Arbeit δW um innerhalb einer Zeitspanne δt gegen die induzierte Spannung $U_{ind}[\gamma_i]$ das Magnetfeld um einen Betrag $\delta \vec{B}$ zu ändern. Es ist

$$\delta W = - \sum_{i=1}^{N} I_i \, U_{ind}[\gamma_i] \, \delta t =$$

$$= \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{N} I_i \int_{f_i} d^2\vec{S} \cdot \delta \vec{B} \quad ; \quad \partial f_i = \gamma_i$$

$\overset{\wedge}{\hookrightarrow}$ Faraday: stromtreibende Spannung $\propto$ Änderung des magnetischen Feldes damit weiter

$$\delta W = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{N} I_i \int_{f_i} d^2\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \delta\vec{A}) =$$

$$= \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{N} I_i \oint_{\partial_i} d\vec{x} \cdot \delta\vec{A} =$$

$$= \frac{1}{c} \int d^3x \; \vec{j}(\vec{x}) \cdot \delta\vec{A}$$

nun ist jedoch

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

also

$$\delta W = \frac{1}{c^2} \int d^3x \int d^3x' \; \frac{\vec{j}(\vec{x}) \cdot \delta\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

dies lasst sich leicht integrieren ...

$$W = \frac{1}{2c^2} \int d^3x \int d^3x' \; \frac{\vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} =$$

$$= \frac{1}{2c} \int d^3x \; \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{j}(\vec{x})$$

andererseits ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

damit

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \; (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{A} =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int d^3x \; \epsilon_i{}^{lk} \, \partial_l B_k A^i =$$

$$= -\frac{1}{8\pi} \int d^3x \; \epsilon_i{}^{lk} B_k \, \partial_l A^i =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int d^3x \; B_i B^i$$

also

$$\boxed{W = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \; |\vec{B}(\vec{x})|^2}$$

Vergleich mit Elektrostatik

$$\boxed{W = \frac{1}{8\pi} \int d^3x \; |\vec{E}(\vec{x})|^2}$$

Betrachte Anordnung von Leiterschleifen

$\gamma_1, \dots, \gamma_N$ mit Strömen $I_1, \dots, I_N$

$$W = \frac{1}{2c} \int d^3x \; \vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{A}(\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{2c^2} \int d^3x \int d^3x' \; \frac{\vec{j}(\vec{x}) \cdot \vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (I_i)^2 L_i + \sum_{i<j} M_{ij} I_i I_j$$

mit

$$L_i = \frac{1}{c^2} \oint_{\gamma_i} dx^\ell \oint_{\gamma_i} dx'_\ell \; \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \; \dots$$ Induktivität der i-ten Leiterschleife

$$M_{ij} = \frac{1}{c^2} \oint_{\gamma_i} dx^\ell \oint_{\gamma_j} dx'_\ell \; \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \; \dots$$ Gegeninduktivität zwischen i-ten und j-ten Leiterschleife