Inhalt dieser Vorlesung

Magnetostatik

Magnetische Flussdichte

Biot-Savart'sches Gesetz

Ampere'sches Kraftgesetz

Kontinuierliche Stromdichten

Grundgleichungen der Magnetostatik

& Vektorpotential

Magnetisches Moment

Nachtrag vom letzten Mal

für $|\vec{x}'| < |\vec{x}|$ gilt

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \overline{Y}_{lm}(\vartheta', \varphi') \, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Elektrostatisches Potential & Multipolzerlegung

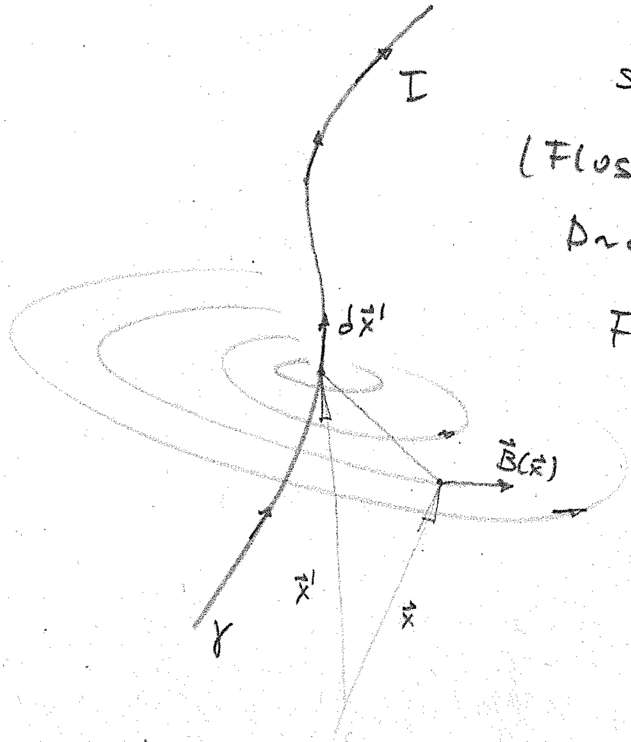
$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} =$$

$$= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \, q_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} \, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Multipolmomente

$$\boxed{q_{lm} = \int d^3x \; \rho(\vec{x}) \, |\vec{x}|^l \, \overline{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi)}$$

Magnetische Flussdichte



stromführenden Leiter (Fluss von Ladungsträgern durch Draht) erzeugt magnetische Flussdichte (magnetisches Feld $\vec{B}$)

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{c}\int_\gamma d\vec{x}' \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}}$$

Drehmoment auf magnetischen Dipol

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad ; \quad \frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}$$

Einheiten:

strom

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ haben gleiche Einheiten

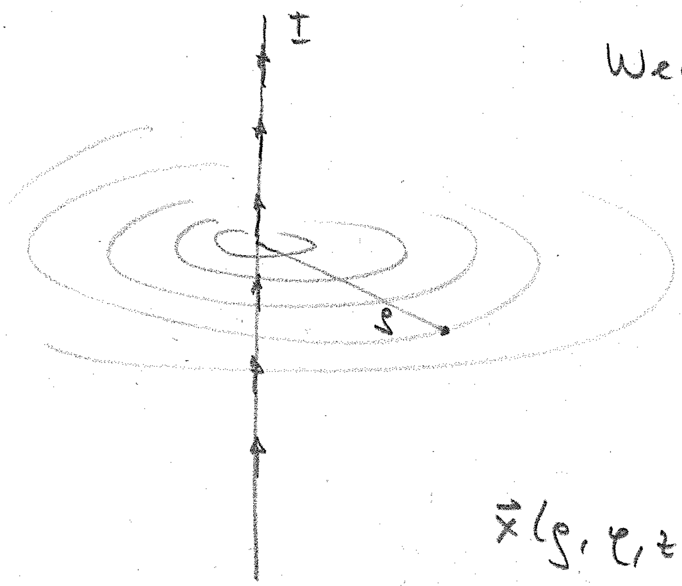
I hat die Einheit von Ladung / Zeit

c ... Lichtgeschwindigkeit, hier als Konversationsfaktor zwischen Länge und Zeit

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{c} \int_{\gamma} d\vec{x}' \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = q \int d^3x' \, \rho(\vec{x}') \, \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

Beispiel: Magnetische Flussdichte eines langen Leiters



Wegen der Rotationssymmetrie bieten sich Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) an

$$\vec{x}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$\partial_\rho \vec{x}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_\rho$$

$$\partial_\varphi \vec{x}(\rho, \varphi, z) = \rho \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \rho\, \vec{e}_\varphi$$

$$\partial_z \vec{x}(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_z$$

⋮

$$\boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{2I}{c} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi}$$

Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{c} \int_{x=0,\,y=0} d\vec{x}\,' \times \frac{\vec{x} - \vec{x}\,'}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|^3} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Parametrisierung des Leiters} \\ \vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z' \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{d.h.} \quad d\vec{x}\,' = dz'\,\vec{e}_z\end{array}}$$

$$= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{\begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z - z' \end{pmatrix}}{(\rho^2 + (z-z')^2)^{\frac{3}{2}}} \underset{\circ}{=} \quad (z-z') = -(z'-z)$$

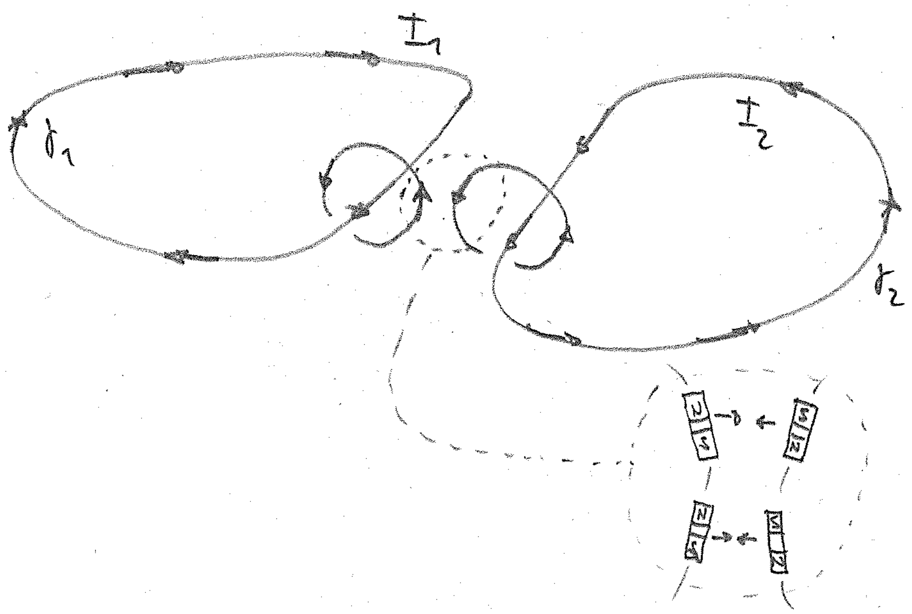
$$= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dz' \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(\rho^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l|l} z' = \rho\tan\eta & z = -\infty \longleftrightarrow \eta = -\frac{\pi}{2} \\ dz' = \frac{\rho}{\cos^2\eta}\,d\eta & z = +\infty \longleftrightarrow \eta = +\frac{\pi}{2} \end{array}}$$

$$= \frac{I}{c} \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\eta \cos\eta =$$

$$= \frac{2I}{c} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi \qquad \boxed{\vec{B}(\vec{x}) = \frac{2I}{c} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi}$$

Ampere'sches Kraftgesetz



Kraft $d\vec{F}_{2\to1}$ die auf infinitesimales Linienelement $d\vec{x}_1$ eines von einem Strom I_1 durchflossenen Leiters γ_1 im Magnetfeld $\vec{B}_2$ eines zweiten Leiters (I_2, γ_2) wirkt ist durch

$$\boxed{d\vec{F}_{2\to1} = \frac{I_1}{c}\, d\vec{x}_1 \times \vec{B}_2(\vec{x}_1)}$$

gegeben.

aus dem Biot-Savart'schen Gesetz erhalten wir die vom zweiten auf den ersten Leiter wirkende Kraft $\vec{F}_{2\to1}$ in folgender Form

$$\vec{F}_{2\to1} = \frac{I_1}{c}\oint_{\gamma_1} d\vec{x}_1 \times \vec{B}_2(\vec{x}_1) =$$

$$= \frac{I_1 I_2}{c^2}\oint_{\gamma_1} d\vec{x}_1 \times \oint_{\gamma_2}\left(d\vec{x}_2 \times \frac{\vec{x}_1-\vec{x}_2}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^3}\right)$$

diesen Ausdruck lasst sich weiter vereinfachen

$$\varepsilon^i{}_{jk}\,\varepsilon^k{}_{lm} = \delta^i_l\,\delta_{jm} - \delta^i_m\,\delta_{jl}$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{X}\times(\vec{Y}\times\vec{Z}) = \vec{Y}(\vec{X}\cdot\vec{Z}) - \vec{Z}(\vec{X}\cdot\vec{Y})$$

in Komponentenschreibweise

$$\vec{F}^{\,i}_{2\to 1} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \varepsilon^i{}_{jk}\, dx_1^j\, \varepsilon^k{}_{lm}\, dx_2^l \frac{x_1^m - x_2^m}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} =$$

$$= \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \Big[dx_2^i\, \delta_{jm}\, dx_1^j \frac{x_1^m - x_2^m}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} +$$

$$- \delta_{jl}\, dx_1^j\, dx_2^l \frac{x_1^i - x_2^i}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \Big] =$$

$$= -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \Big[dx_2^i\, dx_1^j \frac{\partial}{\partial x_1^j} \frac{1}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} +$$

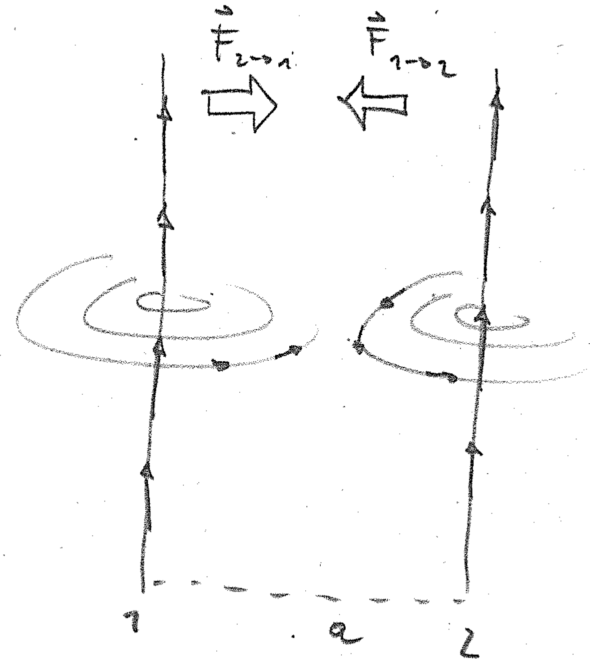
$$+ d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 \frac{x_1^i - x_2^i}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} \Big]$$

→ totale Ableitung

also

$$\boxed{\vec{F}_{2\to 1} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}}$$

Beispiel: Kraft zwischen langen Leitern



$$\vec{x}_1(z_1) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix} ; \quad d\vec{x}_1 = dz_1\, \vec{e}_z$$

$$\vec{x}_2(z_2) = \begin{pmatrix} +\frac{a}{2} \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix} ; \quad d\vec{x}_2 = dz_2\, \vec{e}_z$$

$$\vec{F}_{2\to1} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} d\vec{x}_1 \cdot d\vec{x}_2 \, \frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3} =$$

von 2 auf 1 wirkende Kraft

$$= -\frac{I_1 I_2}{c^2} \int dz_1 \int dz_2 \, \frac{-a\,\vec{e}_x + (z_1 - z_2)\,\vec{e}_z}{\left(a^2 + (z_1 - z_2)^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

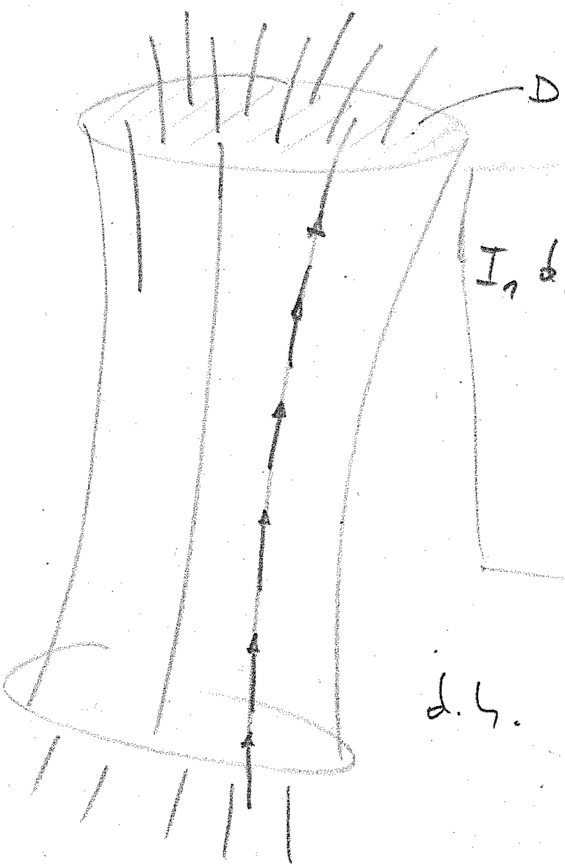
$$= \int dz_1 \, \frac{\partial \vec{F}_{2\to1}}{\partial z_1} \longrightarrow \infty$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{F}_{2\to1}}{\partial z_1} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, \frac{\vec{e}_x}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} = 2 \frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{1}{a} \vec{e}_x}$$

..... Kraft pro Längeneinheit

Stromdichten

bisher betrachteten wir stets isolierte ein-dimensionale (d.h. unendlich dünne) Leiterschleifen. Realistische Stromverteilungen sind ausgedehnt im Raum. Wir denken uns diese als Bündel solcher isolierten Leiterschleifen.



$$I_1 \, d\vec{x}_1 \to \sum_{i=1}^{N} I_i \int_{\gamma_i} \underbrace{dt \, \frac{d\vec{x}_i(t)}{dt}}_{\text{Länge}} \underbrace{\delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t))}_{1/\text{Volumen}} =: \vec{j}(\vec{x})$$

d.h. $\vec{j}(\vec{x})$ .... Strom/Fläche

I .... Ladung/Zeit

$$\boxed{I[D] = \int_D d^2\vec{S} \cdot \vec{j} \quad \text{.... Strom durch Fläche}}$$

Kraft auf Stromdichte im Magnetfeld

$$\vec{F} = \frac{I}{c} \int_{\gamma} d\vec{x} \times \vec{B} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{c} \int d^3x \; \vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})$$

Kraftdichte

$$\boxed{d\vec{F} = \frac{1}{c} \, d^3x \; \vec{J}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x})}$$

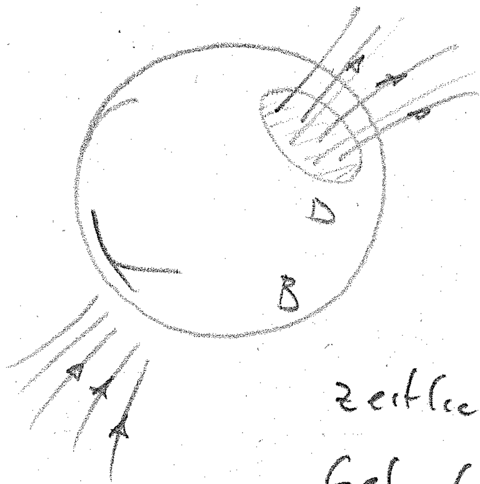
Drehmoment auf Volumselement d^3x

$$d\vec{M} = \vec{x} \times d\vec{F}$$

Drehmomentdichte

Ladungserhaltung

betrachte stromdurchflossenes Gebiet B



Ströme

$$I[D] = \int_D d^2\vec{S}\cdot\vec{j}$$ … Ladung durch D pro Zeit

zeitliche Änderung der im Gebiete enthaltenen Ladung ist

$$\frac{d}{dt} Q_t[B] = \int_B d^3x \; \frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\vec{x})$$

erfolgt aufgrund des durch den Rand fließenden Stromes

$$\frac{d}{dt} Q_t[B] = -\oint_{\partial B} d^2\vec{S}\cdot\vec{j} =$$

$$\underset{\text{Gauss}}{=} -\int d^3x \; \vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

dies muss für alle Gebiete gelten

es folgt also die Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0}$$

<u>Stromdichte einer Verteilung von Punktteilchen</u>

$$\rho(t,\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_i(t))$$

$$\vec{j}(t,\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\vec{v}_i\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_i(t))$$

Kontinuitätsgleichung erfüllt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\vec{x}) = -\sum_{i=1}^{N} q_i\,\vec{v}_i\cdot\vec{\nabla}_x\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_i(t))$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}(t,\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i\,\vec{v}_i\cdot\vec{\nabla}_x\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_i(t))$$

Spezialfall wo alle Ladungsträger gleich und erhalten sind (also z.B. keine Rekombination von Elektronen an Ionen geschieht)

$$\vec{j}(t,\vec{x}) = \rho(t,\vec{x})\ \vec{v}(t,\vec{x})$$

ρ: Ladungsdichte

$\vec{v}$: Geschwindigkeitsfeld der Ladungsträger

<u>Kraft auf einzelne Punktladung</u>

$$\vec{F} = \frac{1}{c}\int d^3x\ \vec{j}(\vec{x}) \times \vec{B}(\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{c}\int d^3x\ q\ \delta(\vec{x} - \vec{x}(t))\ \vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{c}\ q\ \vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{x}(t))$$

Lorentzkraft auf Punktladung in elektrischen und magnetischen Feldern

$$\boxed{\vec{F}(t) = m\frac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) = q\,\vec{E}(\vec{x}(t)) + \frac{1}{c}q\,\vec{v}(t) \times \vec{B}(\vec{x}(t))}$$

Grundgleichungen der Magnetostatik

Magnetfeld kontinuierlichen Stromdichte

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \, \vec{J}(\vec{x}') \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

beachte

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} = -\vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

also

$$\vec{B}(\vec{x}) = -\frac{1}{c} \int d^3x' \, \vec{J}(\vec{x}') \times \vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} =$$

Vorzeichenwechsel bei Vertauschung

$$= +\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \int d^3x' \, \vec{J}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} =$$

$$= (\vec{\nabla} \times \vec{A})(\vec{x})$$

Vektorpotential

$$\vec{B}(\vec{x}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A})(\vec{x})$$

mit

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3x' \; \vec{j}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Helmholtzzerlegung

$\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}\right)$ Vektorfeld $\vec{V}(\vec{x})$ eindeutig durch $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ bestimmt und besitzt Zerlegung

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\Phi = \Phi[\vec{\nabla} \cdot \vec{V}]$$
$$\vec{A} = \vec{A}[\vec{\nabla} \times \vec{V}]$$

Divergenz von $\vec{B}$

es ist $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

damit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

da

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \varepsilon^{ij}{}_{k}\, \partial_i \partial_j A^k = 0$$

Rotation von $\vec{B}$

beachte

$$[\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]^i = \varepsilon^{ij}{}_{k}\, \partial_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})^k =$$

$$= \varepsilon^{ij}{}_{k}\, \varepsilon^{kl}{}_{m}\, \partial_j \partial_l A^m =$$

$$= \partial_j \partial^i A^j - \Delta A^i$$

also

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

hier

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}') \, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

also

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B})(\vec{x}) = \frac{1}{c}\vec{\nabla}\int d^3x' \, j^l(\vec{x}') \, \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} +$$

$$-\frac{1}{c}\int d^3x' \, \vec{j}(\vec{x}') \, \Delta \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} =$$

$$= -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\int d^3x' \, j^l(\vec{x}') \, \frac{\partial}{\partial x'^l}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} +$$

$$+ \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x}) =$$

$$= +\frac{1}{c}\vec{\nabla}\int d^3x' \, (\vec{\nabla}\cdot\vec{j})(\vec{x}') \, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} +$$

$$+ \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x}) =$$

$$= -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\int d^3x' \, \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\varrho(\vec{x}')}_{=0} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x}) =$$

in der Magnetostatik ist $\varrho = 0$; d.h. keine $\vec{E}$-Felder

$$= \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{x})$$

$\hat{=}$ Magnetostatik

Grundgleichungen der Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{j} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$$

$\vec{B}$ .... ist Wirbelfeld

$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ .... es gibt keine magnetischen Ladungen / Monopole

Eichtransformationen

da $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ folgt dass es ein Vektorpotential $\vec{A}$ gibt so dass

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

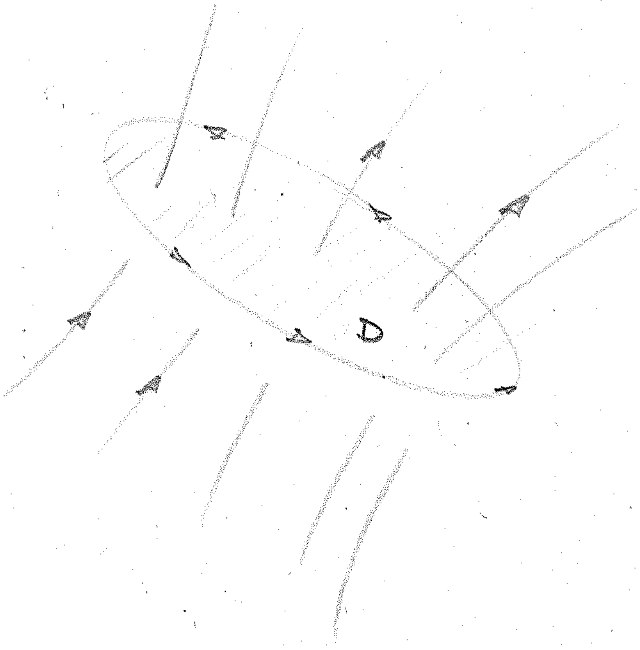
damit $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ automatisch erfüllt

da $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\chi=0$ (da $(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\chi)^i=\varepsilon^{ijk}\partial_j\partial_k\chi=0$)

ist $\vec{A}$ eindeutig bis auf Eichtransformationen bestimmt

$$\boxed{\vec{A}=\frac{1}{c}\int d^3x'\,\vec{j}(\vec{x}')\,\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}+\vec{\nabla}\chi}$$

Amperesches Durchflussgesetz



Strom durch Fläche D:

$$I[D] = \int_D d^2\vec{S}\cdot\vec{j} = \frac{c}{4\pi}\int_D d^2\vec{S}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) =$$

$$= \frac{c}{4\pi}\oint_{\partial D} d\vec{x}\cdot\vec{B}$$

$$\boxed{\oint_{\partial D} d\vec{x}\cdot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\int_D d^2\vec{S}\cdot\vec{j}}$$

Magnetisches Dipolmoment einer Stromverteilung

betrachte die Entwicklung $\left(\frac{|\vec{x}'|}{|\vec{x}|} < 1\right)$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} - \vec{x}' \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}|} + \ldots$$

also für das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \, \vec{J}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} =$$

$$= \frac{1}{c}\frac{1}{|\vec{x}|}\int d^3x' \, \vec{J}(\vec{x}') \; +$$

$$+ \frac{1}{c}\frac{x^i}{|\vec{x}|^3}\int d^3x' \; x'_i \; \vec{J}(\vec{x}')$$

für einzelne Leiterschleife ist

$$\int d^3x\ j^l(\vec{x}) = I \oint_\gamma dt\ \frac{dx^l}{dt} = 0$$

$$\int d^3x\ (x^l j^m(\vec{x}) + x^m j^l(\vec{x})) =$$

$$= I \oint_\gamma dt \left(x^l(t) \frac{d}{dt} x^m(t) + x^m(t) \frac{d}{dt} x^l(t) \right) =$$

$$= I \oint_\gamma dt\ \frac{d}{dt} \left(x^l(t)\, x^m(t) \right) = 0$$

also damit auch für Superpositionen solcher Leiterschleifen, d.h. allgemeine Stromdichten $\vec{j}(\vec{x})$ gilt dass

$$\int d^3x\ x^l j^m(\vec{x}) = \frac{1}{2} \int d^3x\ (x^l j^m(\vec{x}) - x^m j^l(\vec{x})) =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^{lm}{}_k \int d^3x\ \varepsilon^k{}_{rs}\, x^r j^s(\vec{x}) =$$

$$= \varepsilon^{lm}{}_k\, m^k$$

damit

Magnetisches Dipolmoment

$$A^i(\vec{x}) = \frac{x^l}{|\vec{x}|^3} \varepsilon_l{}^i{}_k\, m^k + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right)$$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\vec{x}|^3}\right); \quad \vec{m} = \frac{1}{2} \int d^3x\ \vec{x} \times \vec{j}(\vec{x})}$$