

Inhalt dieser Vorlesung

1. Elektrostatik

...

Multipolentwicklung

2. Magnetostatik

Bemerkung zur letzten Vorlesung

$$\frac{1}{1+z^2-2zf} = \sum_{l=0}^{\infty} z^l P_l(f); \quad |f| < 1$$
$$0 < f < 1$$

$$Q = -q \frac{b}{a}$$



Multipolentwicklung

Wir betrachten eine isolierte Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ mit zugehörigem elektrostatisches Potential

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$



in großer Entfernung $\frac{D}{L} \ll 1$ wird das wie eine Punktladung erscheinen

- wie lässt sich das mathematisch begründen?

- wie sehen die Korrekturterme aus?

wir betrachten dazu für $|\vec{z}| < |\vec{x}|$ die
Taylorreihe

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{z}|} &= \frac{1}{|\vec{x}|} - \sum_{i=1}^n \frac{z^i}{|\vec{x}|^3} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n z^k z^j \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j} \frac{1}{|\vec{x}|} + \dots = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} z^{k_1} \dots z^{k_l} \frac{\partial^{k_1} \dots \partial^{k_l}}{\partial x^{k_1} \dots \partial x^{k_l}} \frac{1}{|\vec{x}|} \quad (*) \end{aligned}$$

beachte: l partielle Ableitungen machen
aus einer $\mathcal{O}(\frac{1}{r^n})$ Funktion eine
 $\mathcal{O}(\frac{1}{r^{n+l}})$ Funktion.

Obige Entwicklung (*) lässt sich also
als Potenzreihe bezüglich $\frac{1}{r^{n+l}}$ auffassen

Es ist daher sinnvoll die $\mathcal{O}(\frac{1}{r^{n+l}})$

Abhängigkeit abzuspalten.

wir definieren daher die Winkelfunktionen

$$Y_{k_1 \dots k_e}(\hat{x}) = |\vec{x}|^{l+1} \partial_{k_1} \dots \partial_{k_e} \frac{1}{|\vec{x}|} \Big|_{|\vec{x}| > 0}$$

mit Eigenschaften

$$(i) \quad \frac{d}{dr} Y_{k_1 \dots k_e} = 0$$

$$(ii) \quad Y_{k_1 \dots k_e} = Y_{k_{\pi(1)} \dots k_{\pi(e)}}$$

$$(iii) \quad \int_{S^2} Y_{k_1 k_2 k_3 \dots k_e} = 0$$

(folgt aus $\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = 0$ für $|\vec{x}| > 0$)

wieviele unabhängige Komponenten sind das?

$$\overbrace{(1 \dots 1 | 2 \dots 2 | 3 \dots 3)}^l$$

$n_1 \quad n_2 \quad n_3$

(ii) liefert $\sum_{n_1=0}^l (l - n_1 + 1) = (l+1)^2 - \frac{l(l+1)}{2} =$

$$= (l+1) \left(\frac{l}{2} + 1 \right)$$

(iii) liefert $-\frac{(l-1)l}{2}$ $\swarrow l \rightarrow l-2$

also $(2l+1)$ unabhängige Komponenten

\mathcal{H}_l ... Raum der spurlosen, symmetrischen
Tensoren $T_{k_1 \dots k_l}$

Bemerkungen

- \mathcal{H}_l trägt irreduzible Spin l
Darstellung von $SO(3)$
- $\dim(\mathcal{H}_l) = 2l + 1$

Projektor auf \mathcal{H}_l

Es sei $T_{k_1 \dots k_l} = T_{k_{\pi(1)} \dots k_{\pi(l)}} \quad \forall \pi \in S_l$
symmetrisch. Definiere $T_{\langle k_1 \dots k_l \rangle}$ so dass

- (i) $T_{\langle k_1 \dots k_l \rangle} = T_{\langle k_{\pi(1)} \dots k_{\pi(l)} \rangle} \quad \forall \pi \in S_l$
- (ii) $\exists k_1 T_{\langle k_1 k_1 k_2 \dots k_l \rangle} = 0$
- (iii) $(T_{\langle k_1 \dots k_l \rangle} - T_{k_1 \dots k_l}) W^{k_1 \dots k_l} = 0$
 $\forall W \in \mathcal{H}_l$

Beispiel

$$\begin{aligned} T_{\langle ij \rangle} &= T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta^{lm} T_{lm} = \\ &= T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} T^l{}_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\langle ijk \rangle} &= T_{ijk} - \frac{1}{5} \delta_{ij} T^l{}_{lk} - \frac{1}{5} \delta_{ki} T^l{}_{lj} + \\ &\quad - \frac{1}{5} \delta_{ik} T^l{}_{li} \end{aligned}$$

für $T_{ij} = T_{ji}$; $T_{ijk} = T_{jki} = T_{kij} = T_{jik}$

Normierung und \hat{x} -Darstellung

weitere Eigenschaften

$$\int d^2\Omega Y_{k_1 \dots k_\ell}(\hat{x}) Y_{k'_1 \dots k'_\ell}(\hat{x}) =$$

$$= 4\pi \frac{1}{2^{\ell+1}} \frac{(2\ell)!}{2^\ell} \delta_{\ell \ell'} \underbrace{\delta_{k_1}^{k'_1} \dots \delta_{k_\ell}^{k'_\ell}}_{\text{Projektor auf } \mathcal{H}_\ell}$$

Projektor auf \mathcal{H}_ℓ

sowie

$$Y_{k_1 \dots k_\ell}(\hat{x}) = |\vec{x}|^{\ell+1} \partial_{k_1} \dots \partial_{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|} =$$

$$= (-1)^\ell \frac{(2\ell)!}{2^\ell \cdot \ell!} \frac{x_{k_1} \dots x_{k_\ell}}{|\vec{x}|^\ell}$$

Multipolentwicklung für $|\vec{x}'| < |\vec{x}|$

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{x}) &= \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{1}{|\vec{x}|^{l+1}} Y_{l, k_1 \dots k_l}(\hat{x}) \int d^3x' \rho(\vec{x}') x'^{k_1} \dots x'^{k_l} = \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l)!}{2^l \cdot (l!)^2} \frac{1}{|\vec{x}|^{2l+1}} x^{k_1} \dots x^{k_l} \int d^3x' \rho(\vec{x}') x'^{k_1} \dots x'^{k_l} = \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \frac{1}{|\vec{x}|^{2l+1}} x^{k_1} \dots x^{k_l} Q_{k_1 \dots k_l}^{(l)}
 \end{aligned}$$

Multipolmomente der Ladungsverteilung

$$Q_{k_1 \dots k_l}^{(l)} = \frac{(2l)!}{2^l \cdot l!} \int d^3x' \rho(\vec{x}') x'^{k_1} \dots x'^{k_l}$$

$$Q^{(0)} = \int d^3x \rho(\vec{x}) \dots \text{Gesamtladung (Monopol)}$$

$$Q_k^{(1)} = \int d^3x \rho(\vec{x}) x_k \dots \text{Dipolmoment}$$

$$Q_{k_1 k_2}^{(2)} = 3 \int d^3x \rho(\vec{x}) \left(x_{k_1} x_{k_2} - \frac{1}{3} |\vec{x}|^2 \delta_{k_1 k_2} \right) \dots \text{Quadrupolmoment}$$

Zusammenhang mit Kugelflächenfunktionen

betrachte Drehimpulsoperator

$$\vec{L} = -i \vec{x} \times \vec{\nabla} ; L_j = -i \epsilon_{jlm} x^l \partial_m$$

dessen Betragsquadrat

$$\begin{aligned} |\vec{L}|^2 &= -\epsilon_{jlm} \epsilon_{jkn} x^l \partial_m (x^k \partial_n) = \\ &= -\epsilon_{jlm} \epsilon_{jmn} x^l \partial_n + \\ &\quad -\epsilon_{jlm} \epsilon_{jkn} x^l x^k \partial_m \partial_n = \\ &= 2 x^l \partial_l - |\vec{x}|^2 \partial_m \partial_m + x^l x^k \partial_l \partial_k = \\ &= (x^l \partial_l)^2 + x^l \partial_l - |\vec{x}|^2 \Delta \end{aligned}$$

also

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) - \frac{1}{r^2} |\vec{L}|^2$$

Kugelflächenfunktionen

$$|\vec{L}|^2 Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$L_z Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = m Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

beachte

$$|\vec{L}|^2 \hat{x}^{k_1} \dots \hat{x}^{k_\ell} =$$

$$= - \left[\sum_{n=1}^{\ell} \epsilon^{k_n j \ell} \epsilon^{\ell j} p_n \hat{x}^{k_1} \dots \hat{x}^{k_{n-1}} \hat{x}^{k_{n+1}} \dots \hat{x}^{k_\ell} + \right.$$

$$\left. + 2 \sum_{1 \leq n < s \leq \ell} \epsilon^{k_n j \ell} \epsilon^{k_s j} p_s \hat{x}^{k_1} \dots \hat{x}^{k_{n-1}} \hat{x}^{k_{n+1}} \dots \hat{x}^{k_s} \dots \hat{x}^{k_\ell} \right] =$$

$$= - \left[-2\ell \hat{x}^{k_1} \dots \hat{x}^{k_\ell} + \right.$$

$$\left. - 2 \frac{\ell(\ell-1)}{2} \hat{x}^{k_1} \dots \hat{x}^{k_\ell} \right] =$$

$$= \ell(\ell+1) \hat{x}^{k_1} \dots \hat{x}^{k_\ell}$$

Y_{lm}	Basiswechsel	$\xrightarrow{\quad}$	$\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{2^\ell}{(2\ell)!}}$	$Y_{k_1 \dots k_\ell}$
	zwischen ONB				

Allgemeine Lösung der Laplacegleichung

in Kugelkoordinaten

betrachte Produktdansatz

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$\Delta \phi = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) R(r) + \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} l(l+1) R(r) \right] Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \stackrel{!}{=} 0$$

also

$$R(r) = A r^l + B r^{-l-1}$$

im Fernfeld

$$\phi(\vec{x}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

im Nahfeld

$$\phi(\vec{x}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \tilde{q}_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Zusammenhang mit Multipolentwicklung

für $|\vec{x}'| < |\vec{x}|$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{1}{|\vec{x}|^{l+1}} Y_{k_1 \dots k_l}(\hat{x}) x_{k_1}^1 \dots x_{k_l}^1 = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^l}{(2l)!} \frac{|\vec{x}'|^l}{|\vec{x}|^{l+1}} Y_{k_1 \dots k_l}(\hat{x}) Y_{k_1 \dots k_l}(\hat{x}') = \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \bar{Y}_{lm}(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

$$\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

$$q_{lm} = \int d^3x \rho(\vec{x}) |\vec{x}|^l \bar{Y}_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Realitätsbedingungen

aus $\phi(\vec{x}) = \bar{\phi}(\vec{x})$ sowie

$$\gamma_{l,-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m \bar{\gamma}_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

folgt

$$q_{l,-m} = (-1)^m \bar{q}_{lm}$$

Zusammenhang mit Legendrepolynomen

$$\int_{-1}^1 d\xi P_\ell(\xi) P_{\ell'}(\xi) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}$$

$$Y_{\ell, m=0}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} P_\ell(\cos \vartheta)$$

Orthogonalität

$$\int d^2\Omega Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \bar{Y}_{\ell' m'}(\vartheta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

2. Magnetostatik

Seit historischer Zeit: Magnetfelder auf
magnetische Dipole (Kompassnadel)

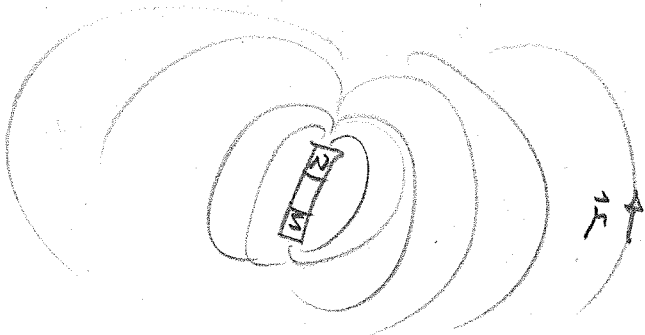
Drehmoment: $\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}$
 \vec{L} Drehimpuls
 \vec{M} Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$\vec{\mu}$ magnetischen Dipol

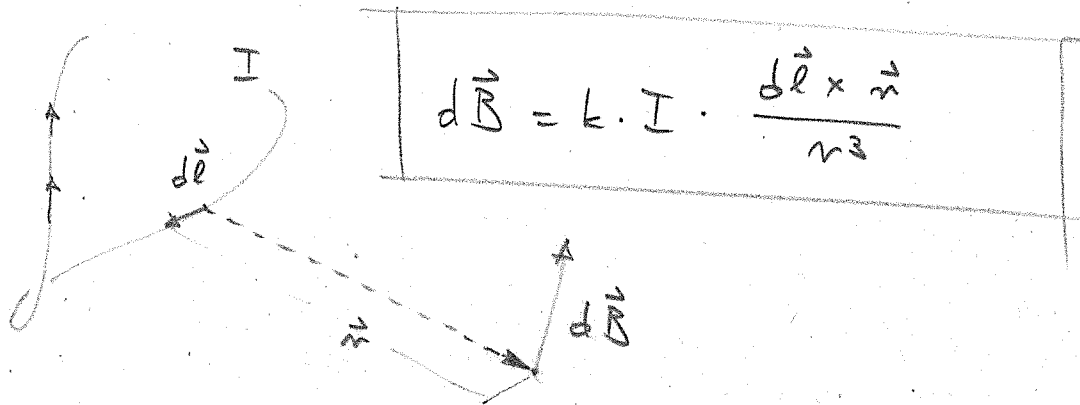
im Gleichgewichtszustand:

$\vec{\mu}$ steht parallel auf \vec{B}



Gesetz von Oersted, Biot-Savart

Stromdurchflossene Leiter erzeugen
magnetische Felder \vec{B}



$$d\vec{B} = k \cdot I \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$k = \begin{cases} \frac{1}{c} & \dots \text{Gauß'sche Einheiten} \\ \frac{\mu_0}{4\pi} & \dots \text{SI-Einheiten} \end{cases}$$

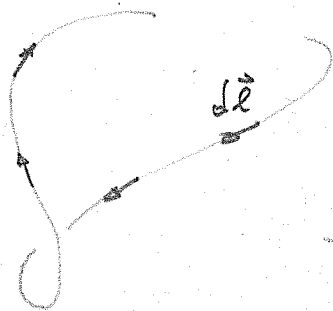
μ_0 ... magnetische Feldkonstante

$$\text{in } \text{N} \cdot \text{A}^{-2}$$

$$\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$$

Ampere'sches Kraftgesetz

Kraft auf eine Leiterschleife
in gegebenem \vec{B} -Feld

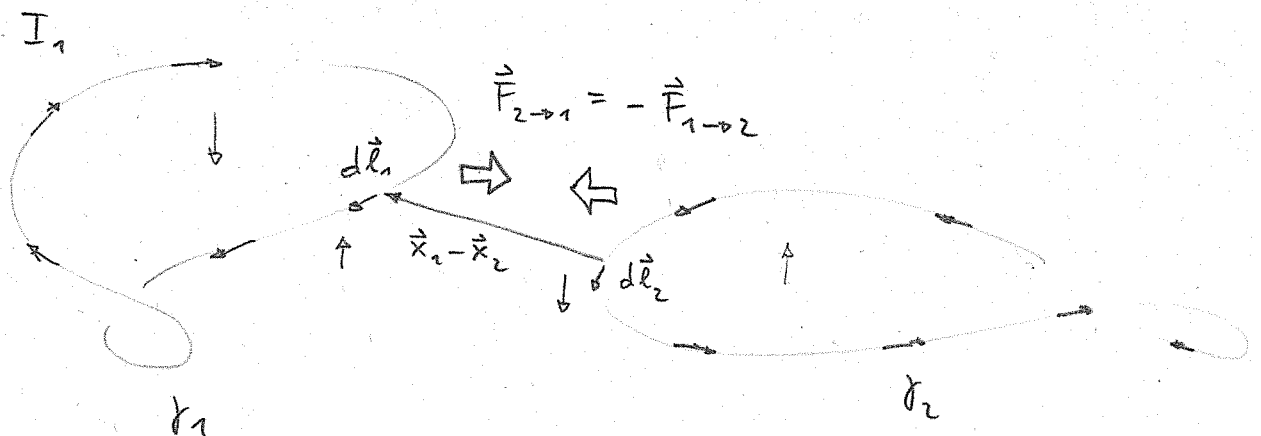


$$d\vec{F} = k \cdot I \, d\vec{l} \times \vec{B}$$

Kraft von Schleife 2 auf Schleife 1:

Δ auch im Plasma
Pinch-Effekt, Tokamak

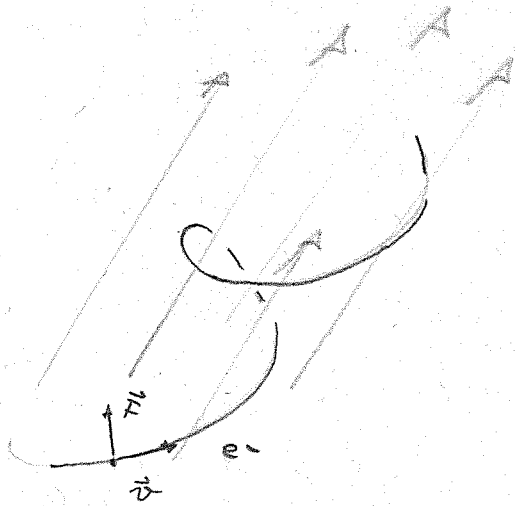
$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{I_1 \cdot I_2}{c} \oint_{\gamma_1} \oint_{\gamma_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_2))}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^3}$$



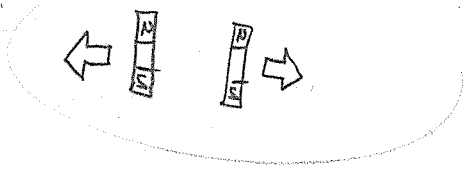
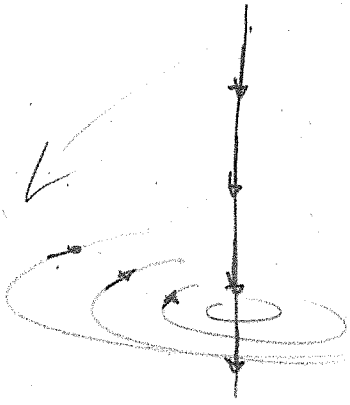
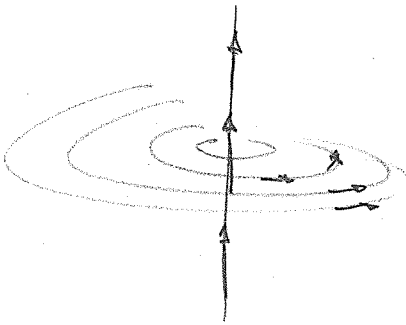
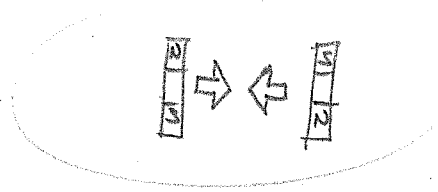
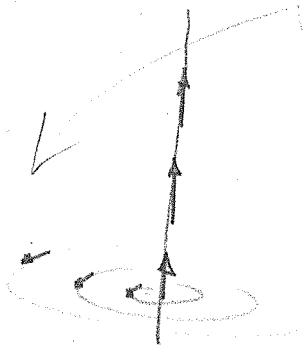
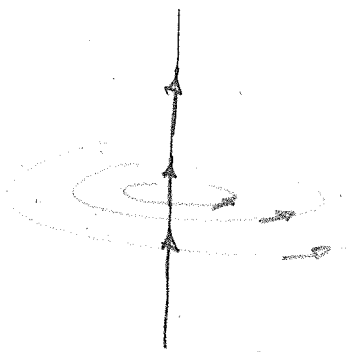
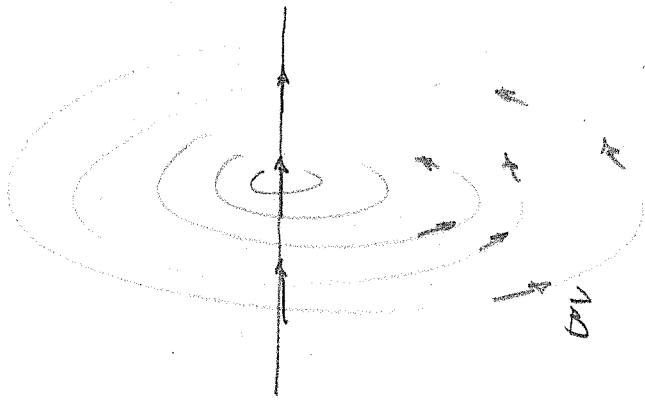
Lorentzkraft

Kraft auf ein idealisiertes Punktteilchen
mit Ladung q und Geschwindigkeit \vec{v}
in gegebenem \vec{E} und \vec{B} Feldern

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B}$$



Zusammenfassung



Lorentzkraft

