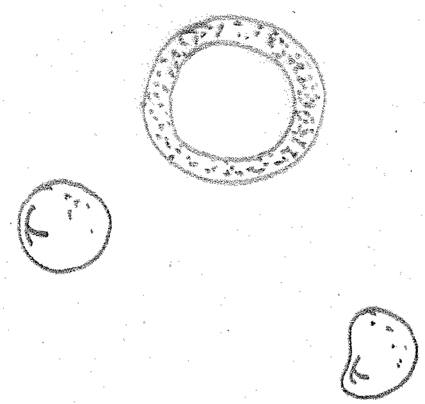
Inhalt dieser Vorlesung

1. Kondensatoren
2. Randwertprobleme und Beispiele
3. Multipolentwicklung

Kondensatoren

betrachte N leitende Körper $K_1,\dots,K_N$ mit Ladungen $Q_1,\dots,Q_N$ und festen Potentialen $\phi_1,\dots,\phi_N$ an deren Rändern $\partial K_1,\dots,\partial K_N$ und $\phi(\vec{x}) = \mathcal{O}(\frac{1}{r})$ für $|\vec{x}| \to \infty$

$$B = \mathbb{R}^3 - \bigcup_{i=1}^{N} K_i$$



$$\Delta\phi = 0 \quad \text{in } B$$

$$\phi|_{\partial K_i} = \phi_i \quad \forall i$$

$$\phi|_{|\vec{x}| \to \infty} = 0$$

Ladungsdichte an Grenzflächen

$$-\frac{1}{4\pi}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi\Big|_{\partial K_i} = \sigma_i$$

$\hookrightarrow$ Normalenvektor auf ∂K_i

Superpositionsprinzip

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} \phi^{(i)} \quad , \quad \text{mit}$$

$$\Delta \phi^{(i)} = 0 \quad \text{in } B$$

$$\phi^{(i)}\Big|_{\partial K_j} = \phi_i\,\delta_{ij}$$

$$\phi^{(i)}\Big|_{|\vec{x}|\to\infty} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)$$

beachte also dass damit $\phi(\vec{x})$ linear von ϕ_i abhängig ist, sowie außerdem

$$Q_i := \oint_{\partial K_i} d^2S\,\sigma_i = -\frac{1}{4\pi}\oint_{\partial K_i} d^2\vec{S}\cdot\vec{\nabla}\phi =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{N}\oint_{\partial K_i} d^2\vec{S}\cdot\vec{\nabla}\phi^{(j)}$$

es besteht also ein linearer Zusammenhang zwischen $Q_1, \dots, Q_N$ und $\phi_1, \dots, \phi_N$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \, \phi_j$$

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{N} [C_{ij}]^{-1} Q_j$$

$C_{ii} = C_i \dots$ Selbstkapazität des i-ten Kondensators

C_{ij} für $i \neq j \dots$ Gegenkapazitäten

beachte außerdem für die darin gespeicherte Arbeit

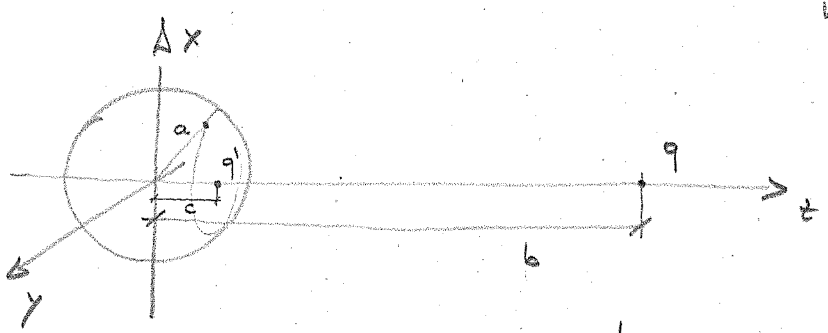
$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \, \rho(\vec{x}) \, \phi(\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_{K_i} d^3x \, \rho(\vec{x}) \, \phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} Q_i \phi_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} C_{ij} \, \phi_i \phi_j$$

Randwertprobleme und Spiegelladungsmethode

<u>Beispiel:</u> Punktladung vor geerdeter Kugel mit Radius a



$$c < a < b$$

Ansatz

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x} - b\vec{e}_z|} - \frac{q'}{|\vec{x} - c\vec{e}_z|} \quad \ldots \text{ im Außenraum}$$

Randbedingung

$$\forall \vec{n} : \vec{n} \cdot \vec{n} = 1 : \phi(a\vec{n}) = 0$$

in Kugelkoordinaten

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

beachte $c < a < b$ sowie

$$|a\vec{n} - b\vec{e}_z|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta$$

also

$$\phi(a\vec{n}) = \frac{q}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\vartheta}} - \frac{q'}{\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos\vartheta}} =$$

$$= \frac{q}{b}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{a}{b})^2-2\frac{a}{b}\cos\vartheta}} +$$

$$- \frac{q'}{a}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{c}{a})^2-2\frac{c}{a}\cos\vartheta}}$$

wir fordern also

$$q' = \frac{a}{b}q \quad ; \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{a}$$

Influenzladung auf der Kugel

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\phi\Big|_{|\vec{x}|=a} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dr}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\vartheta}} + \right.$$

$$\left. - \frac{q'}{\sqrt{r^2+c^2-2rc\cdot\cos\vartheta}}\right]\Bigg|_{r=a} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[q\,\frac{a-b\cos\vartheta}{(a^2+b^2-2ab\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}} + \right.$$

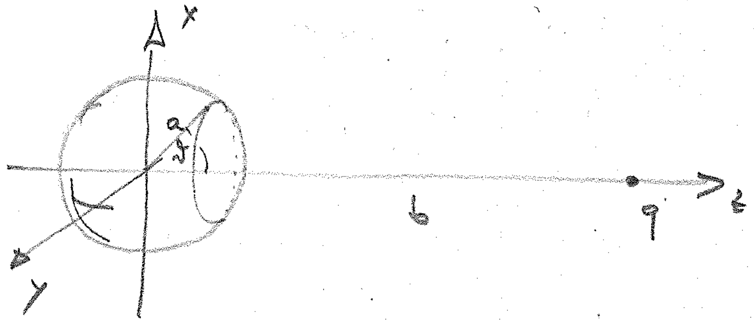
$$\left. - q'\,\frac{a-c\cdot\cos\vartheta}{(a^2+c^2-2ac\cdot\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\right] =$$

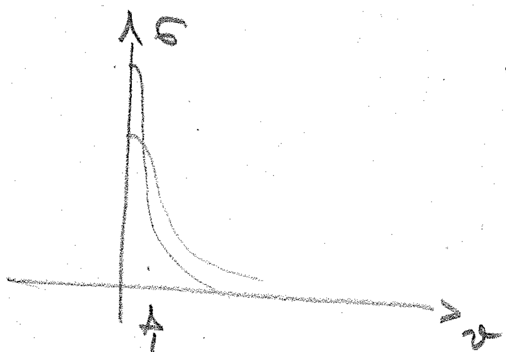
$$= \frac{1}{4\pi}\frac{q}{b}\;\frac{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{b}\cos\vartheta-\frac{1}{a}+\frac{c}{a^2}\cos\vartheta}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}-2\frac{a}{b}\cos\vartheta\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{q}{a\cdot b}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}-2\frac{a}{b}\cos\vartheta\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Ladungsdichte auf der Kugel

$$\boxed{\sigma(\vartheta) = -\frac{1}{4\pi}\frac{q}{a\cdot b}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{1}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}-2\frac{a}{b}\cos\vartheta\right)^{\frac{3}{2}}}}$$





wird schärfer für $b \to a$

$$Q = a^2\int d^2\Omega\,\sigma = 2\pi a^2\int_0^\pi d\vartheta\,\sin\vartheta\,\sigma(\vartheta) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,q\,\frac{a}{b}\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\int_{-1}^{1}d\xi\,\frac{1}{\left(1+\frac{a^2}{b^2}-2\frac{a}{b}\xi\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,q\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}-2\frac{a}{b}\xi}}\Bigg|_{\xi=-1}^{1} =$$

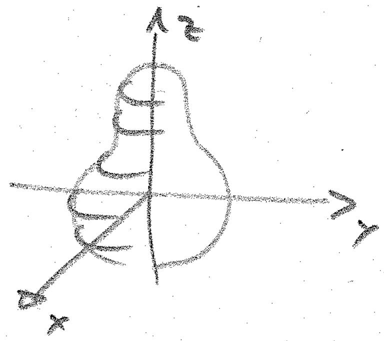
$$= -\frac{1}{2}\,q\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\left[\frac{1}{1-\frac{a}{b}}-\frac{1}{1+\frac{a}{b}}\right] =$$

$$= -q\,\frac{a}{b}$$

Beispiel: Azimuthalsymmetrische Ladungsverteilung

Ladungsdichte in Kugelkoordinaten

$$\rho(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi} f(r, \cos\vartheta)$$



Legendrepolynome

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\xi}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\xi) \quad ; \quad |t|<1$$

$$= \frac{1}{t}\sum_{l=0}^{\infty} t^{-l} P_l(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} t^{-l-1} P_l(\xi) \, ; \quad |t|>1$$

$$P_l(\xi) = \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dt^l}\bigg|_{t=0} \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\xi}}$$

Potential

$$\phi(\vec{x}) = \phi(r, \cos\vartheta) \; ; \qquad \begin{aligned} z &= r\cos\vartheta \\ \xi &= \cos\vartheta \end{aligned}$$

Laplace operator

$$\Delta\phi = \partial^i \partial_i \phi =$$

$$= \partial^i \left[\partial_i r \, \partial_r \phi + \partial_i \xi \, \partial_\xi \phi \right] =$$

$$= \Delta r \, \partial_r \phi + 2 \partial_i r \, \partial^i \xi \, \partial_\xi \partial_r \phi +$$

$$+ \partial_i r \, \partial^i r \, \partial_r^2 \phi +$$

$$+ \Delta \xi \, \partial_\xi \phi + \partial_i \xi \, \partial^i \xi \, \partial_\xi^2 \phi$$

beachte nun

$$\partial_i r = \partial_i |\vec{x}| = \frac{x_i}{|\vec{x}|} = \hat{x}_i$$

$$\partial_i \xi = \partial_i \left(\frac{z}{r}\right) = \frac{\partial_i z}{r} - \frac{z \hat{x}_i}{r^2} = \frac{\partial_i z - \xi \hat{x}_i}{r}$$

$$\partial_i r \, \partial^i r = 1$$

$$\partial_i \xi \, \partial^i \xi = \frac{1}{r^2}\left(1 + \xi^2 - 2\xi^2\right) = \frac{1-\xi^2}{r^2}$$

$$\hat{x}^i \partial_i \xi = \frac{d}{dr} \xi = 0$$

$$\Delta r = \partial_i \hat{x}^i = \frac{2}{r}$$

$$\Delta \xi = -\frac{\xi}{r} \partial_i \hat{x}^i = -\frac{2}{r^2} \xi$$

also

$$\Delta\phi = \frac{2}{r}\partial_r\phi + \partial_r^2\phi +$$

$$-\frac{2}{r^2}\xi\,\partial_\xi\phi + \frac{1}{r^2}(1-\xi^2)\,\partial_\xi^2\phi$$

Produktansatz

$$\phi(r,\cos\vartheta) = r^l P_l(\cos\vartheta)$$

also

$$[l(l-1)+2l]\,P_l(\xi) - 2\xi\frac{d}{d\xi}P_l(\xi) +$$

$$+(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2}P_l(\xi) = 0$$

$$\boxed{(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2}P_l(\xi) - 2\xi\frac{d}{d\xi}P_l(\xi) + l(l+1)P_l(\xi) = 0}$$

Nachtrag: Legendrepolynome

erzeugende Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\xi}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\xi)$$

$$P_l(\xi) = \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dt^l}\Big|_{t=0} \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\xi}}$$

Laplace Gleichung

$$(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2}P_l(\xi) - 2\xi\frac{d}{d\xi}P_l(\xi) +$$

$$+ l(l+1)P_l(\xi) = 0$$

also

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}\right]P_l(\xi) + l(l+1)P_l(\xi) = 0$$

<u>Potenzansatz</u>

aus $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\xi}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\xi)$ folgt sofort

$$P_l(\xi) = \mathcal{O}(\xi^l)$$
$$P_l(1) = 1$$

betrachte den Potenzansatz

$$P_l(\xi) = \sum_{n=0}^{l} a_n^l \xi^n$$

also

$$\sum_{n=0}^{l} \Big[n(n-1)\, a_n^l \,(1-\xi^2)\, \xi^{n-2} +$$

$$-2n\, a_n^l\, \xi^n + l(l+1)\, a_n^l\, \xi^n \Big] \overset{!}{=} 0$$

$$(n+2)(n+1)\, a_{n+2}^l + \left[l(l+1) - n^2 - n \right] a_n^l = 0$$

$$a_{n+2}^l = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+2)(n+1)}\, a_n^l =$$

$$= \frac{(n-l)(n+l) + (n-l)}{(n+2)(n+1)}\, a_n^l =$$

$$= \frac{(n-l)(n+l+1)}{(n+2)(n+1)}\, a_n^l$$

$$\boxed{a_n^l = \frac{2^{n-l} \left(\frac{l-n}{2} + 1\right)! \left(\frac{l+n}{2}\right)! \,(-1)^{\frac{n-l}{2}}}{n!}}$$

erste Ableitungen

$$\frac{d}{d\xi} P_\ell(\xi) = \frac{1}{\ell!} \frac{d^\ell}{dt^\ell}\Big|_{t=0} \frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\xi}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\ell!} \frac{d^\ell}{dt^\ell}\Big|_{t=0} \left[\frac{t}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{3}{2}}}\right] =$$

$$= \frac{1}{(\ell-1)!} \frac{d^{\ell-1}}{dt^{\ell-1}}\Big|_{t=0} \frac{1}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{3}{2}}}$$

es ist außerdem

$$P_{\ell+1}(\xi) = \frac{1}{(\ell+1)!} \frac{d^{\ell+1}}{dt^{\ell+1}}\Big|_{t=0} \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\xi}} =$$

$$= -\frac{1}{(\ell+1)!} \frac{d^\ell}{dt^\ell}\Big|_{t=0} \left[\frac{t-\xi}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{3}{2}}}\right] =$$

$$= -\frac{\ell}{(\ell+1)!} \frac{d^{\ell-1}}{dt^{\ell-1}}\Big|_{t=0} \frac{1}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$+ \frac{1}{(\ell+1)!}\, \xi \frac{d^\ell}{dt^\ell}\Big|_{t=0} \frac{1}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{3}{2}}}$$

zweite Ableitungen

es ist

$$\frac{d^2}{d\xi^2} P_l(\xi) = \frac{1}{l!} \frac{d^l}{dt^l}\Big|_{t=0} \left[\frac{3t^2}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{5}{2}}} \right] =$$

$$= \frac{3}{(l-2)!} \frac{d^{l-2}}{dt^{l-2}}\Big|_{t=0} \left[\frac{1}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{5}{2}}} \right]$$

sowie

$$P_{l+2}(\xi) = -\frac{1}{(l+2)!} \frac{d^{l+1}}{dt^{l+1}}\Big|_{t=0} \left[\frac{t-\xi}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{3}{2}}} \right] =$$

$$= -\frac{1}{(l+2)!} \frac{d^l}{dt^l}\Big|_{t=0} \left[\frac{1}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{3}{2}}} + \right.$$

$$\left. -3 \frac{(t-\xi)^2}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{5}{2}}} \right] =$$

$$= -\frac{1}{(l+2)!} \frac{d^l}{dt^l}\Big|_{t=0} \left[\frac{1-2t^2+4t\xi-3\xi^2}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{5}{2}}} \right] =$$

$$= 2 \frac{1}{(l+2)!} \frac{d^l}{dt^l}\Big|_{t=0} \frac{1}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$-3(1-\xi^2) \frac{1}{(l+2)!} \frac{d^l}{dt^l}\Big|_{t=0} \frac{1}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{5}{2}}}$$

damit

$$P_{l+1}(\xi) = -\frac{1}{l+1}\,\frac{d}{d\xi}P_l(\xi) + \frac{1}{l+1}\,\xi\,\frac{d}{d\xi}P_{l+1}(\xi)$$

$$\boxed{(l+1)\,P_{l+1}(\xi) = -\frac{d}{d\xi}P_l(\xi) + \xi\,\frac{d}{d\xi}P_{l+1}(\xi)}$$

also

$$P_{l+2}(\xi) = 2\frac{1}{(l+2)(l+1)}\frac{d}{d\xi}P_{l+1}(\xi) +$$

$$-\frac{1}{(l+2)(l+1)}(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2}P_{l+2}(\xi)$$

damit

$$\boxed{(l+1)(l+2)P_{l+2}(\xi) = 2\frac{d}{d\xi}P_{l+1}(\xi) + -(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2}P_{l+2}(\xi)}$$

wir erhalten also

$$(l+1)(l+2)\,P_{l+2}(\xi) = -2(l+2)\,P_{l+2}(\xi) +$$

$$+ 2\,\xi \frac{d}{d\xi} P_{l+2}(\xi) - (1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2} P_{l+2}(\xi)$$

damit

$$\boxed{(1-\xi^2)\frac{d^2}{d\xi^2} P_{l+2}(\xi) - 2\,\xi \frac{d}{d\xi} P_{l+2}(\xi) + (l+2)(l+3)\,P_{l+2}(\xi) = 0}$$

außerdem

$$P_0(\xi) = 1$$

$$P_1(\xi) = \xi$$

weitere Rekursionsformeln

es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\xi}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(\xi)$$

damit

$$-\frac{t-\xi}{(1+t^2-2t\xi)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{l=0}^{\infty} l\, t^{l-1} P_l(\xi)$$

$$-\frac{t-\xi}{\sqrt{1+t^2-2t\xi}} = -\sum_{l=0}^{\infty} (t-\xi)\, t^l P_l(\xi) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} l\, t^{l-1} (1+t^2-2t\xi)\, P_l(\xi)$$

also mit $P_l = 0$ für alle $l < 0$:

$$-P_{l-1} + \xi P_l = (l+1) P_{l+1} +$$

$$+ (l-1) P_{l-1} - 2l\, \xi\, P_l$$

$$\boxed{(l+1) P_{l+1}(\xi) = (2l+1)\, \xi\, P_l(\xi) - l\, P_{l-1}(\xi)}$$

Rodrigues Formel

Betrachte

$$P_\ell(\xi) = \frac{1}{\ell!} \frac{d^\ell}{dt^\ell}\Big|_{t=0} \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\xi}} \quad (*)$$

d.h. $P_\ell(\xi)$ ist ein Polynom vom Grade ℓ.

$$P_\ell(\xi) = \sum_{n=0}^{\ell} a_n^\ell \, \xi^n$$

wobei aus $(*)$ folgt

$$a_\ell^\ell = \frac{1}{\ell!}(1)(3)\cdot\ldots\cdot(2\ell-1) =$$

$$= \frac{(2\ell-1)!}{2^{\ell-1}(\ell-1)!\,\ell!} = \frac{(2\ell)!}{2^\ell(\ell!)^2}$$

betrachte die Rekursionsrelationen

$$\left[(l+1) - \xi \frac{d}{d\xi}\right] P_{l+1}(\xi) = -\frac{d}{d\xi} P_l(\xi) \qquad (*)$$

Rodrigues Formel

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l}\frac{1}{l!}\frac{d^l}{d\xi^l}(\xi^2-1)^l$$

für a_l^l mindestens erfüllt

$$a_l^l = \frac{1}{2^l}\frac{1}{l!}\frac{(2l)!}{l!}$$

für alle anderen a_l^i folgt aus Induktion mittels (*) daß Rodrigues Formel erfüllt ist

für $l=0$, $l=1$ sowieso erfüllt

dann

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l\, l!}\, \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2-1)^l$$

andererseits

$$\left[(l+1) - \xi\frac{d}{d\xi}\right] P_{l+1}(\xi) =$$

$$= \frac{1}{2^{l+1}}\,\frac{1}{l!}\,\frac{d^{l+1}}{d\xi^{l+1}}(\xi^2-1)^{l+1} +$$

$$- \frac{1}{2^{l+1}}\,\frac{1}{(l+1)!}\left[\xi\frac{d}{d\xi},\, \frac{d^{l+1}}{d\xi^{l+1}}\right](\xi^2-1)^{l+1} +$$

$$- \frac{1}{2^l}\,\frac{1}{l!}\,\frac{d^{l+1}}{d\xi^{l+1}}\left[\xi^2(\xi^2-1)^l\right] =$$

$$= \frac{1}{2^l}\,\frac{1}{l!}\,\frac{d^{l+1}}{d\xi^{l+1}}\left[(\xi^2-1)^l(\xi^2-1)\right] +$$

$$-\frac{1}{2^l}\,\frac{1}{l!}\,\xi^2\,\frac{d^{l+1}}{d\xi^{l+1}}(\xi^2-1)^l +$$

$$-\frac{1}{2^{l-1}}\,\frac{l+1}{l!}\,\xi\,\frac{d^l}{d\xi^l}(\xi^2-1)^l +$$

$$-\frac{1}{2^l}\,\frac{l+1}{(l-1)!}\,\frac{d^{l-1}}{d\xi^{l-1}}(\xi^2-1)^l =$$

$$= -\frac{1}{2^l}\,\frac{1}{l!}\,\frac{d^{l+1}}{d\xi^{l+1}}(\xi^2-1)^l = -\frac{d}{d\xi}P_l(\xi)$$

Normierung und Orthogonalität

aus

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{d}{d\xi}P_l\right] = -l(l+1)P_l$$

folgt sofort

$$\int_{-1}^{1} d\xi \; P_l(\xi) P_{l'}(\xi) = N_l \, \delta_{ll'}$$

Bestimmung der Normierung

$$N_l = \int_{-1}^{1} d\xi \; |P_l(\xi)|^2 = \frac{2}{2l+1}$$

beachte dann

$$\int_{-1}^{1} d\xi \; |P_l(\xi)|^2 =$$

$$= + \int_{-1}^{1} d\xi \; \frac{1}{2^{2l}} \frac{1}{(l!)^2} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l =$$

$$\boxed{\text{beachte } \left. \frac{d^k}{d\xi^k} (\xi^2 - 1)^l \right|_{\xi = \pm 1} = 0 \quad \text{für } k < l}$$

$$= \frac{1}{2^{2l}} \frac{1}{(l!)^2} (-1)^l \int_{-1}^{1} d\xi \; (\xi^2 - 1)^l \; \frac{d^{2l}}{d\xi^{2l}} (\xi^2 - 1)^l =$$

$$= \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} (-1)^l \int_{-1}^{1} d\xi \; (\xi^2 - 1)^l =$$

$$= \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} (-1)^l \frac{1}{l+1} \int_{-1}^{1} d\xi \; (\xi - 1)^l \frac{d}{d\xi} (\xi + 1)^{l+1} =$$

$$= \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} (-1)^{l-1} \frac{l}{l+1} \int_{-1}^{1} d\xi \; (\xi - 1)^{l-1} (\xi + 1)^{l+1} =$$

$$= \frac{(2l)!}{2^{2l} (l!)^2} \frac{l(l-1) \cdots (1)}{(l+1)(l+2) \cdots (2l)} \int_{-1}^{1} d\xi \; (\xi + 1)^{2l} =$$

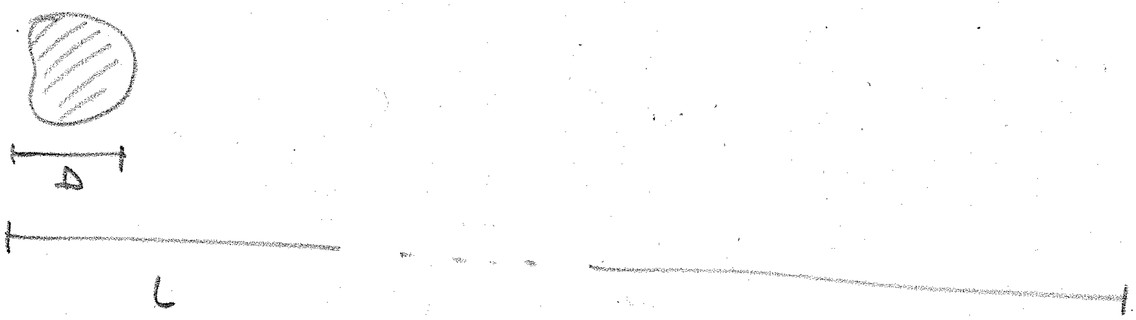
$$= \frac{2}{2l+1}$$

Multipolentwicklung

wir betrachten eine isolierte Ladungsverteilung

Potential

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$



in großer Entfernung $\frac{D}{L} \ll 1$ wird das wie eine Punktladung erscheinen

- wie lässt sich das mathematisch begründen?
- wie sehen die Korrekturterme aus?

wir betrachten dazu die Entwicklung

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{z}|} = \frac{1}{|\vec{x}|} - \vec{z}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{1}{2} z^k z^j \partial_k \partial_j \frac{1}{|\vec{x}|} + \ldots$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} z^{k_1} \cdots z^{k_l} \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_l} \frac{1}{|\vec{x}|}$$

beachte: l partielle Ableitungen machen aus einer $\mathcal{O}(\frac{1}{r^n})$ Funktion eine $\mathcal{O}(\frac{1}{r^{n+l}})$ Funktion

Es ist daher nützlich die $\mathcal{O}(\frac{1}{r^{n+l}})$ Abhangigkeit abzuspalten wir definieren daher die Winkelfunktionen

$$Y_{k_1 \dots k_\ell}(\hat{x}) = |\vec{x}|^{\ell+1} \partial_{k_1} \dots \partial_{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|} \Big|_{|\vec{x}|>0}$$

mit Eigenschaften

(i) $\frac{d}{dr} Y_{k_1 \dots k_\ell} = 0$

(ii) $Y_{k_1 \dots k_\ell} = Y_{k_{\pi(1)} \dots k_{\pi(\ell)}} \quad \forall \pi \in S_\ell$

(iii) $\delta^{k_1 k_2} Y_{k_1 k_2 k_3 \dots k_\ell} = 0$

Wieviele unabhängige Komponenten sind das?

$$(\underbrace{1 \dots 1}_{n_1} | \underbrace{2 \dots 2}_{n_2} | \underbrace{3 \dots 3}_{n_3})$$

$$\overbrace{\hphantom{(1 \dots 1 | 2 \dots 2 | 3 \dots 3)}}^{\ell}$$

(ii) liefert $\displaystyle\sum_{m=0}^{\ell} (\ell - m + 1) = (\ell+1)^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{2} =$

$$= (\ell+1)\left(\frac{\ell}{2} + 1\right)$$

(iii) liefert $\displaystyle -\frac{\ell(\ell-1)}{2}$

also $(2\ell+1)$ unabhängige Komponenten

$\mathcal{H}_\ell$ ... Raum der spurlosen, symmetrischen Tensoren $T_{k_1 \dots k_\ell}$

Bemerkung

- $\mathcal{H}_\ell$ trägt irreduzible Spin ℓ Darstellung von $SO(3)$
- $\dim(\mathcal{H}_\ell) = 2\ell + 1$

<u>Projektor auf $\mathcal{H}_j$</u>

Es sei $T_{k_1 \dots k_\ell} = T_{k_{\pi(1)} \dots k_{\pi(\ell)}} \quad \forall \pi \in S_\ell$ symmetrisch. Definiere $T_{\langle k_1 \dots k_\ell \rangle}$ so dass

(i) $T_{\langle k_1 \dots k_\ell \rangle} = T_{\langle k_{\pi(1)} \dots k_{\pi(\ell)} \rangle} \quad \forall \pi \in S_\ell$

(ii) $\delta^{k_1 k_2} T_{\langle k_1 k_2 k_3 \dots k_\ell \rangle} = 0$

(iii) $\left(T_{\langle k_1 \dots k_\ell \rangle} - T_{k_1 \dots k_\ell} \right) W^{k_1 \dots k_\ell} = 0 \quad \forall W \in \mathcal{H}_\ell$

Beispiel

$$T_{\langle ij \rangle} = T_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,\delta^{lm}\,T_{lm} =$$

$$= T_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,T^{l}{}_{l}$$

$$T_{\langle ijk \rangle} = T_{ijk} - \frac{1}{5}\delta_{ij}\,T^{l}{}_{lk} - \frac{1}{5}\delta_{ki}\,T^{l}{}_{lj} +$$

$$- \frac{1}{5}\delta_{jk}\,T^{l}{}_{li}$$

für $T_{ij} = T_{ji}$; $T_{ijk} = T_{jki} = T_{kij} = T_{jik}$

Normierung und Orthogonalität

aus der Rotationssymmetrie folgt unmittelbar

$$\int d^2\Omega \, Y_{k_1 \dots k_\ell}(\hat{x}) \, Y^{k'_1 \dots k'_{\ell'}}(\hat{x}) =$$

$$= N_\ell \, \delta_{\ell \ell'} \underbrace{\delta^{\langle k'_1}_{k_1} \dots \delta^{k'_\ell \rangle}_{k_\ell}}_{\text{Projektor auf } \mathcal{H}_\ell}$$

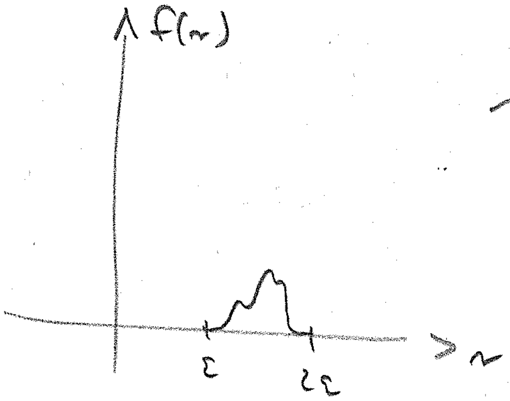
Bestimmung der Normierung N_ℓ:

wegen $\dim(\mathcal{H}_\ell) = 2\ell + 1$ folgt

$$(2\ell+1) N_\ell = \int d^2\Omega \, |\vec{x}|^{2\ell+2} \, \partial_{k_1} \dots \partial_{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|} \, \partial^{k_1} \dots \partial^{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|}$$

es sei $f(r) = f(|\vec{x}|)$ Testfunktion

mit $f(r) = 0 \quad \forall\, r \in \mathbb{R}_{>} - (\varepsilon, 2\varepsilon)\,, \ \varepsilon > 0$



sowie

$$\int_0^{+\infty} dr\, f(r) = 1$$

also

$$(2+1)\, N_\ell = \int_0^{+\infty} dr\, f(r) \int d^2\Omega\, |\vec{x}|^{2\ell+2}\, \partial_{k_1} \dots \partial_{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \partial^{k_1} \dots \partial^{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|} =$$

$$= \int d^3x\, f(|\vec{x}|)\, |\vec{x}|^{2\ell}\, \partial_{k_1} \dots \partial_{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \partial^{k_1} \dots \partial^{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|}$$

es ist

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi\, \delta(\vec{x})$$

$$\partial_k |\vec{x}| = \frac{x_k}{|\vec{x}|}$$

also

$$(2\ell+1) N_\ell = \int d^3x\, f(|\vec{x}|)\, |\vec{x}|^{2\ell}\, \partial_{k_1} \cdots \partial_{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|}\, \partial^{k_1} \cdots \partial^{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|} =$$

$$= -\int d^3x \left(|\vec{x}|\, f'(|\vec{x}|) + 2\ell\, f(|\vec{x}|) \right) |\vec{x}|^{2\ell-1}$$

$$\frac{d}{dr}\left(\partial_{k_2} \cdots \partial_{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|}\right) \partial^{k_2} \cdots \partial^{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|} =$$

$$= \ell \int d^3x \left(r \frac{d}{dr} f + 2\ell f \right) |\vec{x}|^{2\ell-2}\, \partial_{k_2} \cdots \partial_{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|}$$

$$\partial^{k_2} \cdots \partial^{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|} =$$

$$= \ell(2\ell-1) \int d^2\Omega\, |\vec{x}|^{2\ell}\, \partial_{k_2} \cdots \partial_{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|}\, \partial^{k_2} \cdots \partial^{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|} =$$

$$= 4\pi \frac{(2\ell)!}{2^\ell}$$

$\uparrow$ Induktion

also

$$\boxed{\int d^2\Omega \; Y_{k_1\dots k_l}(\hat{x})\, Y^{k_1'\dots k_{l'}'}(\hat{x}) = = 4\pi \frac{1}{2l+1} \frac{(2l)!}{2^l} \delta_{ll'} \delta^{<k_1'}_{k_1} \cdots \delta^{k_l'>}_{k_l}}$$

außerdem folgt aus der Rotationssymmetrie

$$Y_{k_1\dots k_l}(\hat{x}) = M_l \frac{x_{<k_1} \cdots x_{k_l>}}{|\vec{x}|^l}$$

Bestimmung von M_l

$$(2l+1) N_l = M_l \int d^2\Omega \frac{x^{<k_1} \cdots x^{k_l>}}{|\vec{x}|^l} Y_{k_1\dots k_l}(\hat{x}) =$$

$$= M_l \int d^2\Omega \frac{x^{k_1} \cdots x^{k_l}}{|\vec{x}|^l} Y_{k_1\dots k_l}(\hat{x}) =$$

$$= (*) =$$

ahoj

$$(2\ell+1) N_\ell = (*) =$$

$$= M_\ell \int d^2\Omega \; |\vec{x}| \, x^{k_1} \cdot \ldots \cdot x^{k_\ell} \, \partial_{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|} =$$

$$= 4\pi M_\ell \, (-\ell)(-\ell+1) \cdot \ldots \cdot (-1) =$$

$$= 4\pi \, (-1)^\ell M_\ell \, \ell!$$

teda

$$M_\ell = (-1)^\ell \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!}$$

tedy

$$\boxed{|\vec{x}|^{\ell+1} \partial_{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{k_\ell} \frac{1}{|\vec{x}|} = (-1)^\ell \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!} \frac{x_{\langle k_1} \cdot \ldots \cdot x_{k_\ell \rangle}}{|\vec{x}|^\ell}}$$

Multipolentwicklung für $|\vec{x}'| < |\vec{x}|$

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell}{\ell!} \frac{1}{|\vec{x}|^{\ell+1}} Y_{k_1 \dots k_\ell}(\hat{x}) \int d^3x' \rho(\vec{x}') x'^{k_1} \dots x'^{k_\ell} =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(2\ell)!}{2^\ell (\ell!)^2} \frac{1}{|\vec{x}|^{2\ell+1}} x^{k_1} \dots x^{k_\ell} \int d^3x' \rho(\vec{x}') x'_{\langle k_1} \dots x'_{k_\ell \rangle} =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \frac{1}{|\vec{x}|^{2\ell+1}} x^{k_1} \dots x^{k_\ell} Q^{(\ell)}_{k_1 \dots k_\ell}$$

Multipolmomente der Ladungsverteilung

$$Q^{(\ell)}_{k_1 \dots k_\ell} = \frac{(2\ell)!}{2^\ell \ell!} \int d^3x' \rho(\vec{x}') x'_{\langle k_1} \dots x'_{k_\ell \rangle}$$

$Q^{(0)} = \int d^3x \, \rho(\vec{x})$ .... Gesamtladung

$Q^{(1)}_k = \int d^3x \, \rho(\vec{x}) x_k$ .... Dipolmoment

$Q^{(2)}_{ij} = 3 \int d^3x \, \rho(\vec{x}) (x_i x_j - \frac{1}{3} |\vec{x}|^2 \delta_{ij})$ ... Quadrupolmoment

$\vdots \qquad \vdots$

Zusammenhang mit Kugelflächenfunktionen

$f_{lm}^{k_1 \dots k_l} = f_{lm}^{\langle k_1 \dots k_l \rangle}$ sei ONB in $[\mathcal{H}_l]_{\mathbb{C}}$

so dass

$$Y_{lm} = \underbrace{\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{2^l}{(2l)!}}}_{\text{Normierung}} \, Y_{k_1 \dots k_l} \, f_{lm}^{k_1 \dots k_l}$$

$$\sum_{m=-l}^{l} \delta_{k_1 n_1} \dots \delta_{k_l n_l} \, \bar{f}_{lm}^{n_1 \dots n_l} \, f_{lm}^{k_1' \dots k_l'} = \delta_{k_1}^{\langle k_1'} \dots \delta_{k_l}^{k_l' \rangle}$$

damit für $|\vec{x}'| < |\vec{x}|$

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{x'_{k_1} \cdots x'_{k_l}}{|\vec{x}|^{l+1}} Y^{k_1 \dots k_l}(\hat{x}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^l}{(2l)!} \frac{|\vec{x}'|^l}{|\vec{x}|^{l+1}} Y_{k_1 \dots k_l}(\hat{x}') Y^{k_1 \dots k_l}(\hat{x}) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \overline{Y}_{lm}(\hat{x}') Y_{lm}(\hat{x})$$