Inhalt dieser Vorlesung

- Poissongleichung und Laplacegleichung
- Randbedingungen und Grenzflächen
- Elektrostatische Energie einer Ladungsverteilung
- Kondensatoren

Poisson und Laplacegleichung

Grundgleichungen der Elektrostatik

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ ... Ladungsverteilungen als Quellen des elektr. Feldes

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ .... elektrisches Feld ist wirbelfrei

Helmholtzzerlegung – falls $\vec{V}(\vec{x}) = O\left(\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}\right)$ für $\varepsilon > 0$ folgt $\exists\ \phi, \vec{A} : \vec{V} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Die Potentiale ϕ und $\vec{A}$ sind bis auf Eichtransformationen ihrerseits durch $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ bestimmt. $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \iff \vec{A} = \vec{\nabla}\Lambda$

In der Elektrostatik ist also $\exists\ \phi$:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

damit erhalten wir die

Poissongleichung

$$\Delta\phi = -4\pi\rho$$

Partikulare Lösung

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\, \rho(\vec{x}')\, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Allgemeine Lösung

$$\phi(\vec{x}) = \phi_{hom}(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi}\int d^3x'\, \rho(x')\, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

wobei $\phi_{hom}(\vec{x})$ die Laplacegleichung

$$\Delta\phi_{hom} = 0$$

erfüllt.

Randbedingungen und Grenzflächen

Wodurch wird nun die Wahl von Φ_{hom} festgelegt?

→ Durch Randbedingungen

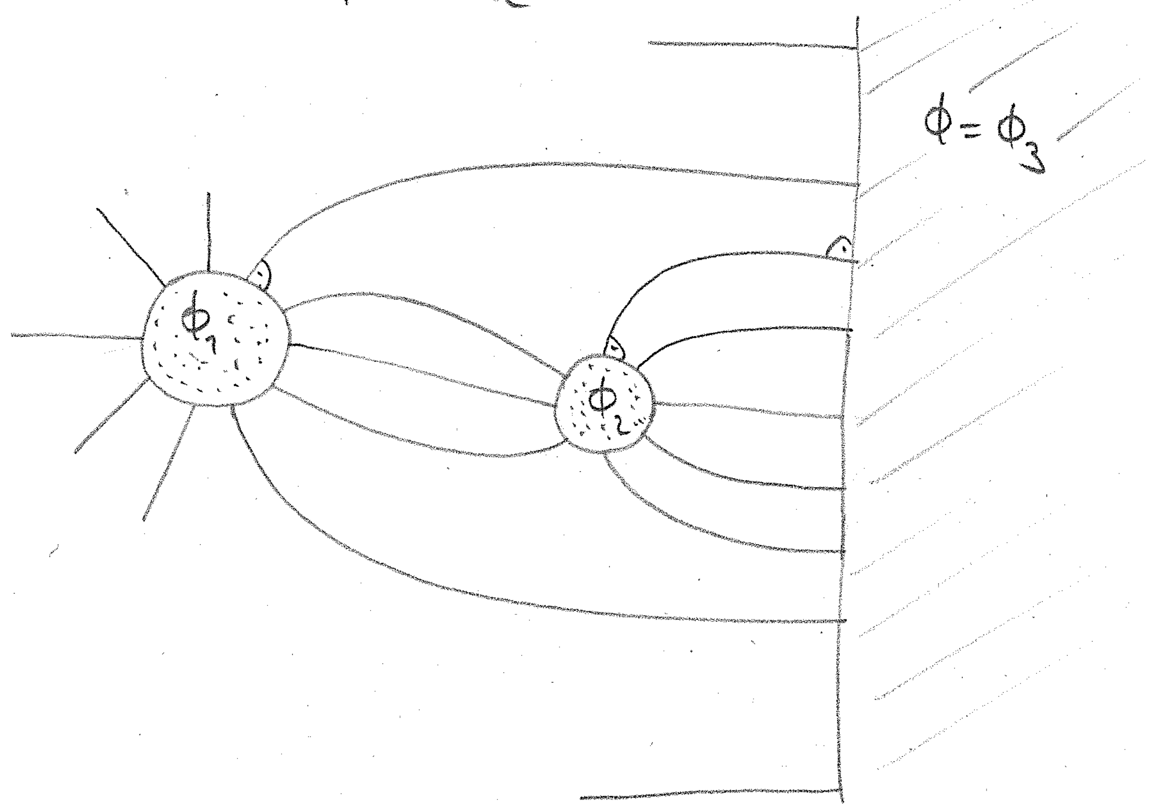
→ Beispiel: Leiterplatten als Grenzflachen

→ Durch die begrenzenden Flachen von Leitern oder Dielektrika (nichtleitende oder schwach leitende Stoffe) lassen sich die Werte des elektrostatischen Potentials oder des elektrischen Feldes an diesen Flachen festhalten.

→ Beispiel Leiter: Im Leiter sind die Ladungen frei beweglich. Es kostet also keine elektrostatische Energie diese im Leiter zu bewegen. Das heißt

(i) $\phi = \text{const.}$ im Leiter

(ii) $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ verschwindet im Leiter und steht $\perp$ auf die Grenzfläche



Dirichlet und von Neumann Randbedingungen

▷ Es sei Φ eine Lösung der Laplacegleichung im Gebiet B zu vorgegebener Ladungsverteilung ρ, d.h.

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho$$

▷ Dann ist Φ durch bestimmte Randwerte auf ∂B eindeutig festgelegt

▷ typische Randbedingungen

(i) Dirichlet: $\Phi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \quad \forall \; \vec{x} \in \partial B$

(ii) von Neumann: $\vec{n} \cdot (\vec{\partial}\Phi)(\vec{x}) = -4\pi\sigma(\vec{x})$
$\forall \; \vec{x} \in \partial B \quad ; \quad \vec{n} \perp \partial B$

mit $\varphi(\vec{x})$, $\sigma(\vec{x})$ jeweils fest vorgegeben.

Betrachte dazu die Green'schen Identitäten. Diese folgen aus dem Gauß'schen Satz für das Vektorfeld

$$\vec{V} = \phi \vec{\nabla} \psi$$

also

$$\boxed{\int_B d^3x \left(\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi + \phi \Delta \psi \right) = \oint_{\partial B} d^2\vec{S} \cdot \phi \vec{\nabla} \psi}$$

.... 1. Green'sche Identität

sowie nach Abziehen von $\phi \leftrightarrow \psi$ daß

$$\boxed{\int_B d^3x \left(\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi \right) = \oint_{\partial B} d^2\vec{S} \cdot \left(\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi \right)}$$

.... 2. Green'sche Identität

(i) Dirichlet

es seien also $\Phi_{1,2}(\vec{x})$ Lösungen zum selben Randwert $\varphi(\vec{x})$ auf ∂B und zur selben Ladungsverteilung ρ also für $U = \Phi_2 - \Phi_1$

$$\Delta U = 0 \;, \quad U|_{\partial B} = 0$$

damit also aus 1. Green'schen Identität

$$\int_B d^3x\, \vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla} U = 0 \iff \vec{\nabla} U = 0 \iff U = 0$$

in ganz B

(ii) Neumann

es seien also $\Phi_{1,2}(\vec{x})$ Lösungen zum selben Randwert $\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \Phi_{1,2} = -4\pi\sigma$ auf ∂B und zur selben Ladungsverteilung ρ, also für $U = \Phi_2 - \Phi_1$

$$\Delta U = 0 \;; \quad \vec{n} \cdot \vec{\nabla} U|_{\partial B} = 0$$

es folgt damit also weiter

$$\int_B d^3x\, \vec{\nabla} U \cdot \vec{\nabla} U = 0 \quad \text{also} \quad \vec{\nabla} U = 0$$

in ganz B

<u>Umwandlung der Poissongleichung in Integralgleichung</u>

Betrachte 2. Green'sche Identität für

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \; ; \quad \Delta\psi = -4\pi\,\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$\phi(\vec{x})$ so daß $\Delta\phi = -4\pi\rho$

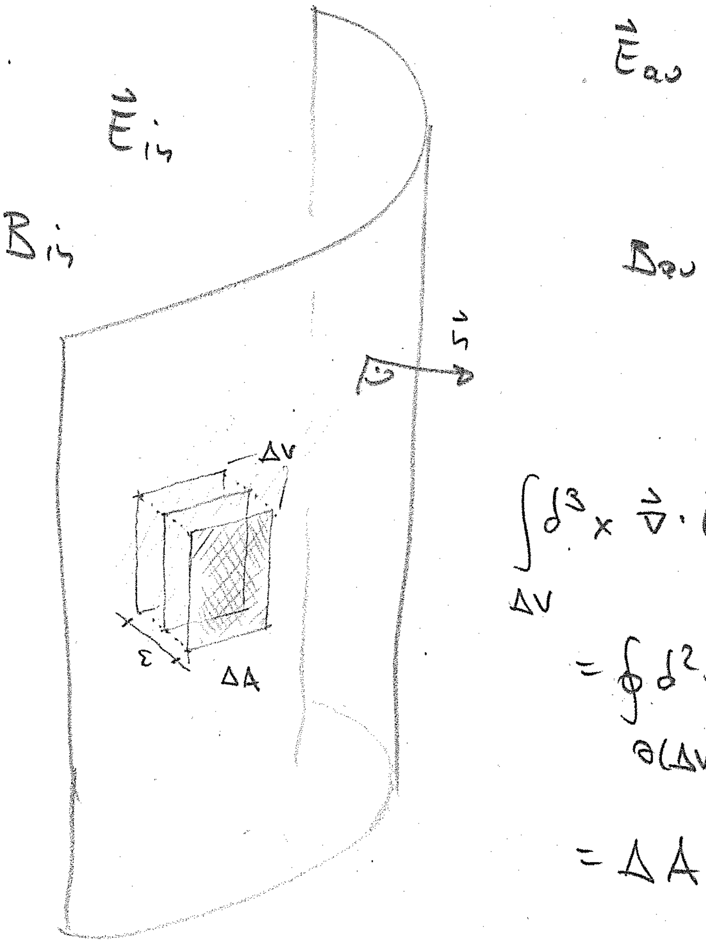
also für alle $\vec{x} \in B$

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \int_B d^3x'\, \rho(\vec{x}')\, \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial B} d^2\vec{S} \cdot \left(\phi\, \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\nabla}\phi \right)}$$

<u>Achtung</u>: ϕ und $\vec{\nabla}\phi$ auf ∂B nicht unabhängig voneinander frei zu wählen ⚠

Was ist die physikalische Bedeutung von $\sigma(\vec{x})$ auf der Grenzfläche?

Wir betrachten dazu das elektrische Feld beim Übergang durch die Grenzfläche D



$$\int_{\Delta V} d^3x\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\, Q_{\Delta V} =$$

$$= \oint_{\partial(\Delta V)} d^2\vec{S}\cdot\vec{E} =$$

$$= \Delta A\ \vec{n}\cdot\left(\vec{E}_{au} - \vec{E}_{in}\right)\Big|_D +$$

$$+ \mathcal{O}(\varepsilon)$$

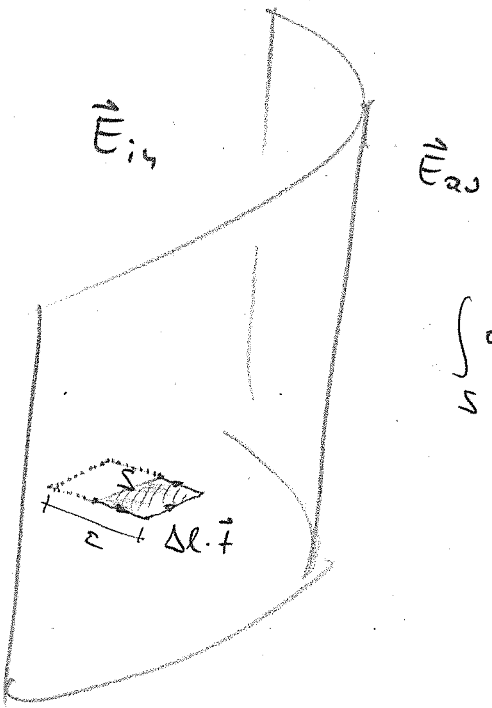
Flächenladungsdichte

$$\boxed{\sigma = \frac{Q_{\Delta V}}{\Delta A}\bigg|_{\Delta V \to 0}}$$

Normalkomponente hat an der Grenzfläche eine Unstetigkeit

$$\vec{n} \cdot (\vec{E}_{au} - \vec{E}_{in})\Big|_{D} = 4\pi\sigma$$

Tangentialkomponente jedoch stetig entlang der Grenzfläche



$$\int_S d^2\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0 =$$

$$= \oint_{\partial S} d\vec{x} \cdot \vec{E} =$$

$$= \Delta l \; \vec{t} \cdot (\vec{E}_{au} - \vec{E}_{in})\Big|_{D} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Elektrostatische Energie

Die dafür notwendige Arbeit um in einer gegebenen Ladungsverteilung aus Punktladungen $q_1, \dots, q_{N-1}$ an den Orten $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{N-1}$ eine weitere Ladung q_N aus dem Unendlichen an den Ort $\vec{x}_N$ zu bringen ist

$$W_{N:1\dots N-1} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{q_N q_i}{|\vec{x}_N - \vec{x}_i|}$$

Um die ganze Ladungsverteilung aufzubauen bedarf es der Arbeit

$$W = W_{2:1} + W_{3:12} + W_{4:123} + \dots =$$

$$= \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

Im Kontinuum wird daraus

$$W = \frac{1}{2}\int d^3x \int d^3x' \; \rho(\vec{x})\,\rho(\vec{x}')$$

wegen

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

folgt daraus

$$W = \frac{1}{2}\int d^3x \; \rho(\vec{x})\,\Phi(\vec{x}) =$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int d^3x \; \Delta\Phi \; \Phi(\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int d^3x \; \vec{\nabla}\Phi \cdot \vec{\nabla}\Phi \; - \overbrace{\frac{1}{8\pi}\oint_{|\vec{x}|\to\infty} d^2\vec{S} \cdot \vec{\nabla}\Phi \; \Phi}^{\to 0}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int d^3x \; |\vec{E}(\vec{x})|^2$$

Selbstenergie

betrachte zwei Punktladungen

$$\vec{E}(\vec{x}) = q_1 \frac{x - \vec{x}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3} + q_2 \frac{\vec{x} - \vec{x}_2}{|\vec{x} - \vec{x}_2|}$$

zugehörige Energiedichte

$$|\vec{E}(\vec{x})|^2 = \frac{q_1^2}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^4} + \frac{q_2^2}{|\vec{x} - \vec{x}_2|^4} +$$

$$+ q_1 q_2 \frac{(\vec{x} - \vec{x}_1) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_2)}{|\vec{x} - \vec{x}_1|^3 \cdot |\vec{x} - \vec{x}_2|^3}$$

$\frac{q_i^2}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^4}$ .... Selbstenergieanteil

$\int d^3x \frac{q_1}{|\vec{x}|^4}$ .... divergierende Energie um Punktladung aufzubauen beachte das Integral

$$\int d^3x \; \frac{(\vec{x}-\vec{x}_1)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2)}{|\vec{x}-\vec{x}_1|^3 \; |\vec{x}-\vec{x}_2|^3} =$$

$$= \int d^3x \; \frac{\vec{x}\cdot(\vec{x}-\vec{x}_2+\vec{x}_1)}{|\vec{x}|^3 \; |\vec{x}-\vec{x}_2+\vec{x}_1|^3} =$$

$$= -\int d^3x \; \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\cdot\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_2+\vec{x}_1|} =$$

$$= -\oint d^2\Omega \int_0^{+\infty} dr \; \frac{d}{dr}\frac{1}{|\vec{x}(r,\vartheta,\varphi)-\vec{x}_2+\vec{x}_1|} =$$

$$= 4\pi \frac{1}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}$$

Kondensatoren

betrachte N leitende Körper $K_1, \dots, K_N$
mit Ladungen $Q_1, \dots, Q_N$ und
festen Potenzialen $\phi_1, \dots, \phi_N$ an den
Rändern $\partial K_1, \dots, \partial K_N$

$$B = \mathbb{R}^3 - \bigcup_{i=1}^{N} K_i$$

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{in } B$$

$$\phi|_{\partial K_i} = \phi_i \; \forall i \; ; \quad \phi|_{|\vec{x}| \to \infty} = 0$$

Ladungsdichte

$$-\frac{1}{4\pi} \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi |_{\partial K_i} = \sigma_i$$

Superpositionsprinzip

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} \phi^{(i)} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} &\Delta \phi^{(i)} = 0 \quad \text{in } B \\ &\phi^{(i)}|_{\partial K_j} = \phi_i \delta_{ij} \\ &\phi^{(i)}|_{|\vec{x}| \to \infty} = 0 \end{aligned}$$

es besteht also linearer Zusammenhang zwischen $Q_1, \dots, Q_N$ und $\phi_1, \dots, \phi_N$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \phi_j$$

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{N} [C^{-1}]_{ij} Q_j$$

$C_{ii} = C_i$ ... Kapazität des i-ten Kondensators

C_{ij} für $i \neq j$ .... Induktionskoeffizienten

beachte außerdem für die darin gespeicherte elektrostatische Energie

$$W = \frac{1}{2} \int d^3x \, \rho(\vec{x}) \, \phi(\vec{x}) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \int_{K_i} d^3x \, \rho(\vec{x}) \, \phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} Q_i \phi_i =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} C_{ij} \phi_i \phi_j$$

Gauß'scher Mittelwertsatz

Betrachte das Integral

$$I_\varepsilon = \oint_{S_2} d^2\Omega \; \varepsilon^2 \, \Phi(\varepsilon \hat{x})$$

einer harmonischen Funktion

$$\Delta \Phi = 0$$

also

$$\varepsilon^2 \frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{I_\varepsilon}{\varepsilon^2}\right) = \oint_{S_2} d^2\Omega \; \varepsilon^2 \, \hat{x} \cdot (\vec{\nabla}\Phi)(\varepsilon \hat{x}) =$$

$$= \oint_{S_2} d^2\vec{S} \cdot \vec{\nabla}\Phi = 0$$

also

$$\frac{I_\varepsilon}{\varepsilon^2} = c \; ; \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{I_\varepsilon}{\varepsilon^2} = 4\pi \, \Phi(\vec{x} = 0)$$