Inhalt dieser Vorlesung

- Arbeit im elektrostatischen Feld, elektrostatisches Potential
- Einschub: Stokes'scher Satz, Gauß'scher Satz
- Divergenz und Rotation des elektrostatischen Feldes
- Helmholtzzerlegung und Grundgleichungen der Elektrostatik

Arbeit im elektrostatischen Feld, elektrostatisches Potential

betrachte das elektrostatische Feld $\vec{E}(\vec{x})$ einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3x' \, \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

betrachte den Gradienten des $\frac{1}{r}$ Potentials

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}|} = \vec{\nabla} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^{\frac{3}{2}}}$$

also

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = -\int d^3x' \, \rho(\vec{x}') \, \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = -(\vec{\nabla} \Phi)(\vec{x})}$$

wobei $\phi(\vec{x})$ das elektrostatische Potential

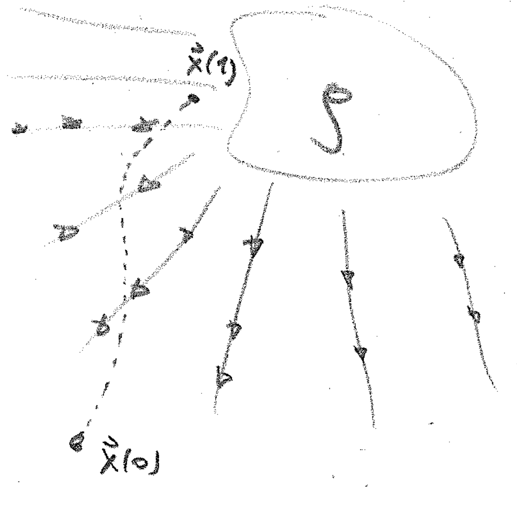
$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \, \varrho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$

bezeichne. Was ist die physikalische Bedeutung von $\phi(\vec{x})$?

Betrachte dazu die dafür notwendige Arbeit $W(0 \to 1)$ um eine Testladung q entlang eines Weges $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{x}(t)$ in einem gegebenen elektrostatischen Feld $\vec{E}(\vec{x})$ von $\vec{x}(0)$ nach $\vec{x}(1)$ zu bewegen.

aufzuwendende Arbeit =

= - Kraft x Weg



also

$$W(0 \to 1) = -\int_\gamma d\vec{x} \cdot \vec{F} = -q \int_\gamma d\vec{x} \cdot \vec{E} =$$

$$= q \int_\gamma d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} \phi =$$

$$= q \int_0^1 dt \, \frac{d}{dt} \vec{x}(t) \cdot (\vec{\nabla} \phi)(\vec{x}(t)) =$$

$$= q \int_0^1 dt \, \frac{d}{dt} \left[\phi(\vec{x}(t)) \right] =$$

$$= q \left(\phi(\vec{x}(1)) - \phi(\vec{x}(0)) \right)$$

<u>Diskussion</u>

- Elektrostatisches Feld = Kraft / Testladung
- Elektrostatisches Potential = - Arbeit / Testladung
- $\phi(\vec{x})$ uneindeutig! Nur Potentialdifferenzen sind tatsächlich messbar
- Es begegnet uns hier zum ersten Male eine sogenannte „eichabhängige" physikalische Größe

Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes

aus $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ folgt sofort

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0}$$

Einschub: Stokes'scher Satz und Gauß'scher Satz

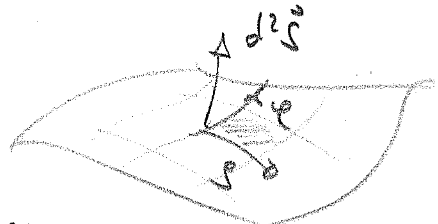
<u>Stokes'scher Satz</u>

Es sei $\vec{V}(\vec{x})$ mind. einmal differenzierbar auf zwei-dimensionalen Fläche F, so gilt

$$\int_F d^2\vec{S} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \underbrace{\oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{V}}_{\text{Zirkulation}}$$

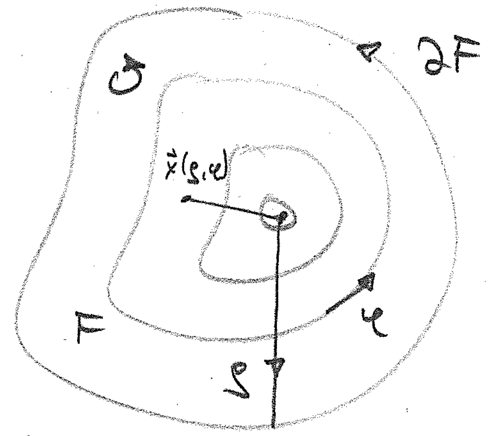
mit zwei-dimensionalem orientiertem Flächenelement

$$d^2\vec{S} = d\rho \, d\varphi \; \partial_\rho \vec{x} \times \partial_\varphi \vec{x}$$



bezüglich Parametrisierung $\vec{x}(\rho, \varphi)$ von F

betrachte dann



$$\int_F d^2\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) =$$

$$= \int_F d\rho\, d\varphi\, (\partial_\rho \vec{x} \times \partial_\varphi \vec{x}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) =$$

es gilt

$$\partial_\rho \vec{x} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho} \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi} \partial_\rho \vec{x}(\rho,\varphi) = \frac{\partial}{\partial \rho} \partial_\varphi \vec{x}(\rho,\varphi)$$

$$\partial_\varphi \vec{x} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$= \int_F d\rho\, d\varphi \left[\partial_\varphi \vec{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{V} - \partial_\rho \vec{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{V} \right] =$$

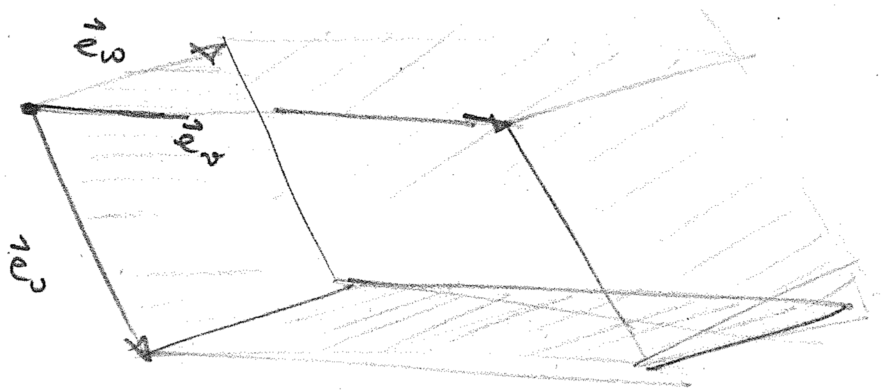
$$= \int_F d\rho\, d\varphi \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\partial_\varphi \vec{x} \cdot \vec{V}) - \underbrace{\frac{\partial}{\partial \varphi} (\partial_\rho \vec{x} \cdot \vec{V})}_{\to 0} \right] =$$

$$= \oint_{\partial F} d\varphi\, \partial_\varphi \vec{x} \cdot \vec{V} =$$

$$= \oint_{\partial F} d\vec{x} \cdot \vec{V}$$

Gauß'schen Satz

betrachte dazu zunächst das von drei linear unabhängigen Vektoren $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w$ aufgespannte Volumen



$$\mathrm{Vol}(B) = \det(\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$$

Wähle neue Koordinaten u, v, w

$$\begin{pmatrix} x(u,v,w) \\ y(u,v,w) \\ z(u,v,w) \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad ; \quad J \in GL(3,\mathbb{R})$$

mit

$$J = (\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_w)$$

bezüglich Indexnotation

$$x^i = J^i{}_a\, u^a \quad ; \quad u^a \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$u^a = [J^{-1}]^a{}_i\, x^i \quad ; \quad x^i \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

duale Basis

$$\vec{f}^u = \frac{1}{\det(J)}\, \vec{e}_v \times \vec{e}_w$$

$$\vec{f}^v = \frac{1}{\det(J)}\, \vec{e}_w \times \vec{e}_u$$

$$\vec{f}^w = \frac{1}{\det(J)}\, \vec{e}_u \times \vec{e}_v$$

$$\vec{f}^a \cdot \vec{e}_b = \delta^a_b$$

andererseits gilt

$$\vec{\nabla} u^a \cdot \vec{e}_b = \vec{\nabla} u^a \cdot \partial_b \vec{x} =$$

$$= [J^{-1}]^a{}_i\, J^i{}_b = \delta^a_b$$

also

$$\vec{\nabla} u^a = \vec{f}^a$$

Basiszerlegung von $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} = \vec{f}^a \partial_a \; \ldots\ldots \; \text{Kettenregel}$$

Basiszerlegung von $\vec{V}$

$$\vec{V} = V^a \vec{e}_a \quad ; \quad V^a = \vec{V} \cdot \vec{f}^a$$

Gauß'scher Satz in B

$$\int_B d^3x \, \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \int_{[0,1]^3} du\, dv\, dw \, \det(J) \, \vec{f}^a \cdot \partial_a [V^b \vec{e}_b] =$$

$$= \int_{[0,1]^3} du\, dv\, dw \, \det(J) \, \vec{f}^a \cdot \vec{e}_b \, \partial_a V^b =$$

$$= \int_{[0,1]^3} du\, dv\, dw \, \det(J) \left[\partial_u V^u + \partial_v V^v + \partial_w V^w \right] =$$

$$= \int_{[0,1]^2} dv\, dw \, \det(J) \, V^u \Big|_{u=0}^{1} + \text{zyklisch}(u,v,w) =$$

$$= \int_{[0,1]^2} dv\, dw \, \det(J) \, \vec{f}^u \cdot \vec{V} \Big|_{u=0}^{1} + \text{zyklisch}(u,v,w) =$$

$$= \int_{[0,1]^2} dv\, dw \, (\partial_v \vec{x} \times \partial_w \vec{x}) \cdot \vec{V} \Big|_{u=0}^{1} + \text{zyklisch} =$$

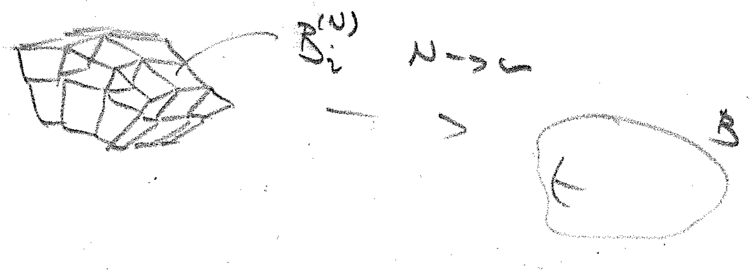
$$= \int_{\partial B} d^2\vec{S} \cdot \vec{V}$$

Riemann Summe für beliebige Volumen

$$B = \bigcup_{i=1}^{N} B_i^{(N)} \quad ; \quad N \to \infty$$

$$\int_B d^3x \; \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \lim_{N \to \infty} \int_{B_i^{(N)}} d^3x \; \vec{\nabla} \cdot \vec{V} =$$

$$= \lim_{N \to \infty} \oint_{\partial B_i^{(N)}} d^2\vec{S} \cdot \vec{V} = \oint_{\partial B} d^2\vec{S} \cdot \vec{V}$$



Divergenz einer Punktladung

betrachte das von einer im Koordinatenursprung sitzenden Punktladung erzeugte elektrostatische Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = q\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} = -\vec{\nabla}\phi$$

$$\phi = q\frac{1}{|\vec{x}|}$$

Was ist dessen Divergenz ?

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{x}) = -\Delta\phi$$

Problem ist dabei dass $\phi(\vec{x})$ bei $\vec{x} = 0$ nicht differenzierbar ist

Ausweg: fasse Ausdruck als Distribution auf es sei also $\varepsilon > 0$ und $f(\vec{x})$ eine Testfunktion; betrachte das Integral

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int d^3x \, \Delta \frac{1}{|\vec{x}|+\varepsilon} f(\vec{x}) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int d^3x \, \partial_i \partial^i \frac{1}{|\vec{x}|+\varepsilon} f(\vec{x}) =$$

$$= - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int d^3x \, \partial^i \frac{1}{|\vec{x}|+\varepsilon} \partial_i f(\vec{x}) =$$

$$= + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int d^3x \, \frac{1}{(|\vec{x}|+\varepsilon)^2} \frac{x^i}{|\vec{x}|} \partial_i f(\vec{x}) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \oint_{S_2} d^2\Omega \int_0^{+\infty} dr \, \frac{r^2}{(r+\varepsilon)^2} (\partial_r f)(\vec{x}(r,\vartheta,\varphi)) =$$

$$\boxed{d^2\Omega = \sin^2\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}$$

$$= -4\pi \, f(\vec{x}=0)$$

also

$$\boxed{\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi \, \delta(\vec{x})}$$

fur eine Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ ergibt sich daraus wegen

$$\Phi(\vec{x}) = \int d^3x' \, \rho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

die Poissongleichung

$$(\Delta \Phi)(\vec{x}) = \int d^3x' \, \rho(\vec{x}') \, \Delta \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} =$$

$$= -4\pi \int d^3x' \, \rho(x') \, \delta(\vec{x} - \vec{x}') =$$

$$= -4\pi \, \rho(\vec{x})$$

also

$$(\Delta \Phi)(\vec{x}) = -4\pi \rho(\vec{x}) \ldots \text{ Poissongleichung}$$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -(\vec{\nabla} \Phi)(\vec{x})$$

---

oder aquivalent

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 4\pi \rho(\vec{x})$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$$

$$\boxed{\text{Helmholtzzerlegung und Grundgleichungen der Elektrostatik}}$$

beachte für allgemeines Vektorfeld $\vec{E}(\vec{x})$

$$E^i(\vec{x}_0) = \int_B d^3x \; E^i(\vec{x})\, \delta(\vec{x}-\vec{x}_0) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_B d^3x \; E^i(\vec{x})\, \partial_k \partial^k \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\oint_{\partial B} d^2S^k \, E^i(\vec{x})\, \partial_k \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_B d^3x \, (\partial^k E^i)(\vec{x})\, \partial_k \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\oint_{\partial B} d^2S^k \; E^i(\vec{x})\, \partial_k \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_B d^3x \; \epsilon_l{}^{ki}\, \epsilon^l{}_{mn} (\partial^m E^n)(\vec{x})\, \partial_k \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_B d^3x \; (\partial^i E^k)(\vec{x})\, \partial_k \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} =$$

$$= (*) =$$

also weiter

$$E^i(\vec{x}_0) = (*) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\oint_{\partial B} \left(d^2S^k\, E^i(\vec{x}) - d^2S^i\, E^k(\vec{x}) \right) \partial_k \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_B d^3x \left[\epsilon_l{}^{ki}\, (\vec{\nabla}\times\vec{E})^l\, \partial_k \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} + \right.$$

$$\left. - E^k(\vec{x})\, \partial_k \partial^i \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} \right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\oint_{\partial B} d^2S^m\, E^n(\vec{x})\, \epsilon^l{}_{mn}\, \epsilon_l{}^{ki}\, \partial_k \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} +$$

$$- \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial B} d^2S^k\, E_k(\vec{x})\, \partial^i \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_B d^3x \left[\epsilon_l{}^{ki}\, (\vec{\nabla}\times\vec{E})^l\, \partial_k \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} + \right.$$

$$\left. + (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})\, \partial^i \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} \right]$$

also folgt für alle $\vec{x} \in B$

$$\vec{E}(\vec{x}) = -(\vec{\nabla}\phi)(\vec{x}) + (\vec{\nabla}\times\vec{A})(\vec{x})$$

mit (Vorzeichenwechsel wegen $\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -\frac{\partial}{\partial y^i}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$)

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_B d^3x' \, (\vec{\nabla}\cdot\vec{E})(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} +$$

$$- \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial B} d^2 S'^k \, E_k(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_B d^3x' \, (\vec{\nabla}\times\vec{E})(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} +$$

$$- \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial B} d^2\vec{S}' \times \vec{E}(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

<u>$B \to \mathbb{R}^3$</u>

Falls außerdem $\vec{E}(\vec{x})$ schneller als $\frac{1}{r}$ abfällt ($\vec{E} = O(\frac{1}{r^{1+\varepsilon}})$, $\varepsilon > 0$) ist $\vec{E}(\vec{x})$ durch Angabe von $(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})(\vec{x})$ und $(\vec{\nabla}\times\vec{E})(\vec{x})$ gegeben, wobei

$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= O\left(\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}\right) \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= O\left(\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}\right) \end{aligned}\right\} \text{sonst log-Divergenz}$$

Zusammenfassung: Grundgleichungen der Elektrostatik

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$

..... Ladungen als Quellen des elektrostatischen Feldes

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

..... Wirbelfreiheit des elektrostatischen Feldes

statische Ladungsverteilung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

statisches elektrisches Feld

Poisson und Laplacegleichung

aus der Helmholtzzerlegung folgt

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad (\text{wegen } \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0)$$

damit

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \quad \ldots\ldots \text{ Poissongleichung}$$

$$\phi = \phi_{part} + \phi_{hom} \quad \text{mit}$$

$$\Delta\phi_{hom} = 0 \quad \ldots\ldots \text{ Laplacegleichung}$$

sowie partikularen Losung, z.B.

$$\phi_{part}(\vec{x}) = \int d^3x' \, \rho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$