Elektromagnetische Felder in Materie

wir gehen von den mikroskopischen Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{e} = 4\pi\rho_{micro}\,, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{b} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{b} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}_{micro} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{e}\,, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{e} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{b}$$

aus und mitteln diese uber makroskopische Langenskala L

$L \gg L_0 = 10^{-8}\,m$ ... untere Schranke des makroskopischen Bereichs

$a = 10^{-10}\,m$ ... molekular-atomare Langendimension

Nachtrag: Bohr-Radius, atomare Frequenzen

Bohr-Radius

$$m_e \omega^2 a_B = \frac{e^2}{a_B} \quad ; \qquad e^2 = \alpha \hbar c \ldots \text{ in Gauß Einheiten}$$

$$\underline{m_e \omega a_B^2 = \hbar}$$

$$a_B = \frac{\hbar^2}{e^2 m_e} = \frac{1}{\alpha} \frac{\hbar}{m_e c} \approx 5 \cdot 10^{-11}\,\text{m}$$

atomare Frequenzen

$$\omega = \frac{\hbar}{m_e a_B^2} = \alpha^2 \frac{m_e \cdot c^2}{\hbar} \approx 4 \cdot 10^{16}\,\frac{1}{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi \hbar}{\alpha^2 c^2} \frac{1}{m_e} \approx 1{,}5 \cdot 10^{-16}\,\text{s}$$

$$\lambda = c \cdot T \approx 5 \cdot 10^{-8}\,\text{m}$$

kleinste zulässige Wellenlänge äußeren Felder

d.i. Wellenlänge L_0 mit Schwingungsperiode

$$T_0 = \frac{L_0}{c} \approx 3 \cdot 10^{-17}\,\text{s}$$

ein Problem!

⚠

Im Volumen L_0^3 sind etwa $\left(\frac{L_0}{a}\right)^3 \approx 10^6$ Atome/Molekule. Deren Zeitentwicklung uber $\frac{L}{c}$ jedoch unkorreliert ist. Jene Fouriermoden der mikroskopischen Felder, die zu atomaren Prozessen gehören, fallen damit trotz $\frac{T}{T_0} \approx 1$ aus raumlichen Mittelwerten heraus.

Wir konnen uns also auf raumliche Mittelwerte von Observablen beschranken

$$\langle O(t,\vec{x}) \rangle = \int d^3\vec{x}'\, f(\vec{x}-\vec{x}')\, O(t,\vec{x}')$$

mit

(i) $f(\vec{x}) = f(|\vec{x}|)$ sei Testfunktion

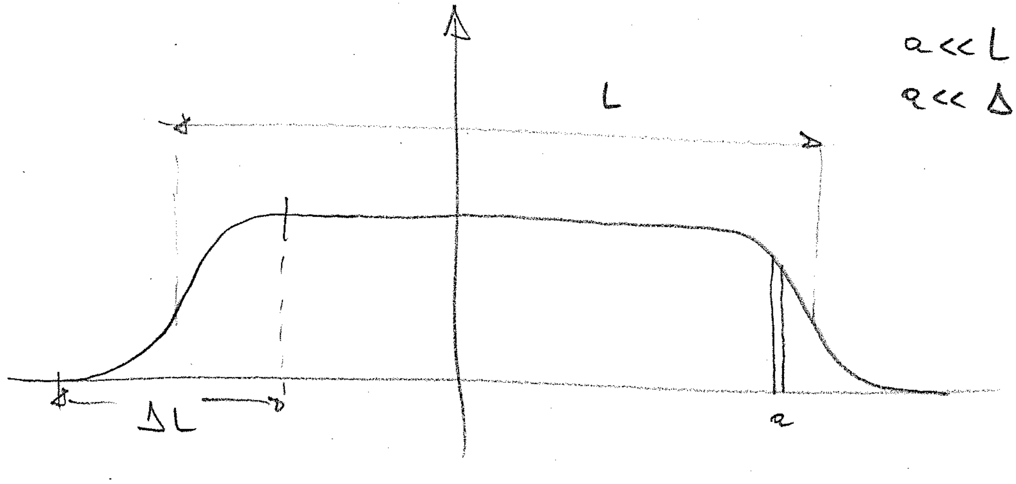
(ii) $f(\vec{x}) \geq 0$

(iii) $\int d^3x\, f(\vec{x}) = 1$

sowie

$a \ll L$

$a \ll \Delta L$



Partielle Ableitungen vertauschen mit der Mittelwertbildung

$$\partial_t \langle O(t,\vec{x}) \rangle = \langle \partial_t O(t,\vec{x}) \rangle$$

$$\partial_i \langle O(t,\vec{x}) \rangle = \langle \partial_i O(t,\vec{x}) \rangle$$

Makroskopisches elektromagnetisches Feld

$$\vec{E}(t,\vec{x}) = \langle \vec{e}(t,\vec{x}) \rangle$$

$$\vec{B}(t,\vec{x}) = \langle \vec{b}(t,\vec{x}) \rangle$$

Erfüllt damit homogene Maxwellgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} \end{aligned}}$$

Mittelung der Ladungsdichte

Ladungsdichte besitze Zerlegung

$$\rho_{micro} = \rho_{frei} + \rho_{geb}$$

ρ_{frei} .... freie Ladungsträger

ρ_{geb} ... gebundene Ladungsträger

$$\rho_{geb}(t,\vec{x}) = \sum_{j \in geb.} q_j \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t)) =$$

$$= \sum_{n \in M} \rho_n(t,\vec{x})$$

mit $\rho_n(t,\vec{x})$ .... Ladungsdichte des n-ten Moleküls M_n

M .... Indexmenge aller Moleküle

$$\rho_{frei}(t,\vec{x}) = \sum_{j \in frei} q_j \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t))$$

Massenschwerpunkt des n-ten Moleküls M_n sei $\vec{X}_n$, Ortsvektor der j-ten Ladung in M_n: $\vec{x}_j = \vec{X}_n + \vec{\xi}_j$; $j \in M_n$

Räumliches Mittel der Ladungsdichte von M_n

$$\langle \rho_n(t,\vec{x}) \rangle = \sum_{j \in M_n} q_j \int d^3x' \, \delta(\vec{x}' - \vec{X}_n(t) - \vec{\xi}_j(t)) \, f(\vec{x}') =$$

$$= \sum_{j \in M_n} q_j \, f(\vec{x} - \vec{X}_n(t) - \vec{\xi}_j(t)) =$$

$$= \sum_{j \in M_n} q_j \, f(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) +$$

$$- \sum_{j \in M_n} q_j \, (\vec{\xi}_j(t) \cdot \vec{\nabla}) f \big|_{\vec{x} - \vec{X}_n(t)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j \in M_n} q_j \, (\vec{\xi}_j(t) \cdot \vec{\nabla})^2 f \big|_{\vec{x} - \vec{X}_n(t)} +$$

$$+ \mathcal{O}(\xi^3)$$

Ladung des n-ten Moleküls

$$Q_n := \sum_{j \in M_n} q_j$$

Dipolmoment des n-ten Moleküls

$$\vec{P}_n(t) := \sum_{j \in M_n} q_j \, \vec{\xi}_j(t)$$

Quadrupolmoment des n-ten Moleküls

$$Q_n^{ij}(t) := \sum_{k \in M_n} q_k \Big(\xi_k^i(t) \, \xi_k^j(t) +$$
$$- \frac{1}{3} |\vec{\xi}_k(t)|^2 \delta^{ij} \Big)$$

Spuranteil zur Ladung

$$r_n^2(t) := Q_n^{-1} \sum_{k \in M_n} q_k \, |\vec{\xi}_k(t)|^2$$

wir erhalten damit

$$\langle \rho_{micro}(t,\vec{x}) \rangle =$$

$$= \langle \rho_{frei}(t,\vec{x}) \rangle + \langle \rho_{geb}(t,\vec{x}) \rangle =$$

$$= \langle \rho_{frei}(t,\vec{x}) \rangle + \sum_{n\in M} Q_n f(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) +$$

$$- \sum_{n\in M} \vec{P}_n(t) \cdot (\vec{\nabla} f)(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n\in M} Q_n^{ij}(t) \, (\partial_i \partial_j f)(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{n\in M} Q_n r_n^2(t) \, (\Delta f)(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) +$$

$$+ \mathcal{O}(\xi^3)$$

Makroskopische Ladungsdichte

$$\rho(t,\vec{x}) = \langle \rho_{frei}(t,\vec{x}) \rangle + \sum_{n \in M} Q_n f(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{n \in M} Q_n r_n^2(t) (\Delta f)(\vec{x} - \vec{X}_n(t))$$

Polarisierung

$$P^i(t,\vec{x}) = \sum_{n \in M} P_n^i(t) f(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) +$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{n \in M} Q_n^{ij}(t) (\partial_j f)(\vec{x} - \vec{X}_n(t))$$

Gemittelte Coulombgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \mathcal{O}(\xi^3)$$

Elektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

isotrope Medien (isotropes Dielektrikum)

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

ε ... (relative) Permitivität

anisotrope Medien

$$D^i = \varepsilon^i{}_j E^j$$

$\varepsilon^i{}_j$ ... Permitivitätstensor

Makroskopische Coulombgleichung

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho}$$

Mittelung der Stromdichte

Stromdichte besitze Zerlegung

$$\vec{J}_{micro} = \vec{J}_{frei} + \vec{J}_{geb}$$

$\vec{J}_{frei}$ ... freie Ladungsträger

$\vec{J}_{geb}$ ... gebundene Ladungsträger

$$\vec{J}_{geb}(t,\vec{x}) = \sum_{k \in geb} q_k \, \vec{v}_k(t) \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_k(t)) =$$

$$= \sum_{n \in M} \vec{J}_n(t,\vec{x})$$

$$\vec{J}_{frei}(t,\vec{x}) = \sum_{k \in frei} q_k \, \vec{v}_k(t) \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_k(t))$$

Räumliches Mittel der Stromdichte von M_n

$$\langle \vec{J}_n(t,\vec{x}) \rangle = \sum_{k\in M_n} q_k \, \vec{v}_k(t) \int d^3x' \, \delta(\vec{x}' - \vec{x}_k(t)) \, f(\vec{x} - \vec{x}') =$$

$$= \sum_{k\in M_n} q_k \, \vec{v}_k(t) \, f(\vec{x} - \vec{x}_k(t)) =$$

$$= \sum_{k\in M_n} q_k \left(\vec{V}_n(t) + \frac{d}{dt} \vec{\xi}_k(t) \right)$$

$$\Big(f(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) +$$

$$- (\vec{\xi}_k(t) \cdot \vec{\nabla}) f \big|_{\vec{x} - \vec{X}_n(t)} +$$

$$+ \frac{1}{2} (\vec{\xi}_k(t) \cdot \vec{\nabla})^2 f \big|_{\vec{x} - \vec{X}_n(t)} + \mathcal{O}(\xi^3) \Big)$$

mit

$$\vec{V}_n(t) = \frac{d}{dt} \vec{X}_n(t) \; \ldots\ldots$$ Geschwindigkeitsvektor von M_n

sowie für $k \in M_n$

$$\frac{d}{dt} \vec{x}_k(t) = \vec{v}_k(t) = \frac{d}{dt} \left(\vec{X}_n(t) + \vec{\xi}_k(t) \right)$$

Wir erhalten also

$$\langle \vec{J}_n(t,\vec{x}) \rangle = Q_n \vec{V}_n(t) f(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) +$$

$$+ \frac{d}{dt} \left(\vec{P}_n(t) f(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) \right) +$$

$$+ \sum_{k \in M_n} q_k \Big(\vec{\xi}_k(t) \, (\vec{V}_n(t) \cdot \vec{\nabla}) f \big|_{\vec{x} - \vec{X}_n(t)} +$$

$$- \vec{V}_n(t) \, (\vec{\xi}_k(t) \cdot \vec{\nabla}) f \big|_{\vec{x} - \vec{X}_n(t)} \Big) +$$

$$- \sum_{k \in M_n} q_k \frac{d}{dt} \vec{\xi}_k(t) \, (\vec{\xi}_k(t) \cdot \vec{\nabla}) f \big|_{\vec{x} - \vec{X}_n(t)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k \in M_n} q_k \vec{V}_k(t) \, (\vec{\xi}_k(t) \cdot \vec{\nabla})^2 f \big|_{\vec{x} - \vec{X}_n(t)} +$$

$$+ \mathcal{O}(\xi^3)$$

beachte dritten Term:

$$\sum_{k\in M_n} q_k \frac{d}{dt}\xi_k^i(t)\ \xi_k^j(t)\,(\partial_j f)(\vec{x}-\vec{X}_n(t)) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k\in M_n} q_k\ \varepsilon^{ij}{}_l\ \varepsilon_{rs}{}^l \frac{d}{dt}\xi_k^r(t)\ \xi_k^s(t)\ \partial_j f\Big|_{\vec{x}-\vec{X}_n(t)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{k\in M_n} q_k \frac{d}{dt}\left(\xi_k^i(t)\ \xi_k^j(t)\right)\partial_j f\Big|_{\vec{x}-\vec{X}_n(t)} =$$

$$= -m_n^l(t)\ \varepsilon^{ij}{}_l\,(\partial_j f)(\vec{x}-\vec{X}_n(t)) +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(Q_n^{ij}(t)\,(\partial_j f)(\vec{x}-\vec{X}_n(t))\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}V_n^l(t)\ Q_n^{ij}(t)\,(\partial_l\partial_j f)(\vec{x}-\vec{X}_n(t)) +$$

$$+ \frac{1}{6}Q_n \frac{d}{dt}r_n^2(t)\ (\partial^i f)(\vec{x}-\vec{X}_n(t))$$

Magnetisierung des n-ten Moleküls

$$\boxed{\vec{m}_n(t) = \frac{1}{2}\sum_{k\in M_n} q_k\ \vec{\xi}_k(t)\times\frac{d}{dt}\vec{\xi}_k(t)}$$

beachte damit

$$
\begin{aligned}
\langle j_n^i(t,\vec{x})\rangle = {} & Q_n V_n^i(t)\, f(\vec{x}-\vec{X}_n(t)) + \\
& + \frac{d}{dt}\left(P_n^i(t)\, f(\vec{x}-\vec{X}_n(t))\right) + \\
& + \epsilon^{il}{}_m\, \epsilon_{rs}{}^m\, P_n^r(t)\, V_n^s(t)\, (\partial_l f)(\vec{x}-\vec{X}_n(t)) + \\
& + \epsilon^{il}{}_j\, m_n^j(t)\, (\partial_l f)(\vec{x}-\vec{X}_n(t)) + \\
& - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(Q_n^{ij}(t)\, (\partial_j f)(\vec{x}-\vec{X}_n(t))\right) + \\
& - \frac{1}{2} V_n^l(t)\, Q_n^{ij}(t)\, (\partial_l \partial_j f)(\vec{x}-\vec{X}_n(t)) + \\
& - \frac{1}{6} Q_n \frac{d}{dt} r_n^2(t)\, (\partial^i f)(\vec{x}-\vec{X}_n(t)) + \\
& + \frac{1}{2} V_n^i(t)\, Q_n^{rs}(t)\, (\partial_r \partial_s f)(\vec{x}-\vec{X}_n(t)) + \\
& + \frac{1}{6} Q_n\, r_n^2(t)\, V_n^i(t)\, (\Delta f)(\vec{x}-\vec{X}_n(t)) + \mathcal{O}(\xi^3)
\end{aligned}
$$

Magnetisierung

$$
\boxed{\vec{M}(t,\vec{x}) = \sum_{n\in M} \vec{m}_n(t)\, f(\vec{x}-\vec{X}_n(t))}
$$

wir betrachten den Fall wo $\vec{V}_n(t) = \vec{V}(t)$

$$\langle j^i_{geb}(t,\vec{x})\rangle = \sum_{n\in M} \langle j^i_n(t,\vec{x})\rangle =$$

$$= \sum_{n\in M} Q_n\, f(\vec{x} - \vec{X}_n(t))\, V^i(t) +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{n\in M} Q_n\, r^2_n(t)\, (\Delta f)(\vec{x} - \vec{X}_n(t))\, V^i(t) +$$

$$- \frac{1}{6} \sum_{n\in M} Q_n \frac{d}{dt} r^2_n(t)\, (\partial^i f)(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) +$$

$$+ \partial_t P^i(t,\vec{x}) + \epsilon^{il}{}_j\, (\partial_l M^j)(t,\vec{x}) +$$

$$+ \epsilon^{il}{}_m\, \epsilon_{rs}{}^m \sum_{n\in M} P^r_n(t)\, V^s(t)\, (\partial_l f)(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) +$$

$$+ \frac{1}{2} \epsilon^{il}{}_m\, \epsilon_{rs}{}^m \sum_{n\in M} V^r(t)\, Q^{sj}_n(t)\, (\partial_l \partial_j f)(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) +$$

$$+ \mathcal{O}(\xi^3)$$

makroskopische Stromdichte

$$\vec{j}(t,\vec{x}) = \langle \vec{j}_{frei}(t,\vec{x}) \rangle +$$

$$+ \sum_{n \in M} Q_n \, f(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) \, \vec{V}(t) +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{n \in M} Q_n \, r_n^2(t) \cdot (\Delta f)(\vec{x} - \vec{X}_n(t)) \, \vec{V}(t) +$$

$$- \frac{1}{6} \sum_{n \in M} Q_n \frac{d}{dt} r_n^2(t) \, (\vec{\nabla} f)(\vec{x} - \vec{X}_n(t))$$

Stromerhaltung

$$(\partial_t \rho)(t,\vec{x}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{j})(t,\vec{x}) = 0$$

wir erhalten daraus die

makroskopischen Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{4\pi}{c} \partial_t \vec{P} +$$

$$+ \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \times (\vec{P} \times \vec{V}) +$$

$$+ \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \times \vec{M} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{E}$$

makroskopische magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = \vec{B} - \frac{4\pi}{c} \vec{M} - \frac{1}{c} (\vec{D} - \vec{E}) \times \vec{V}$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{D}}$$

Magnetische Permeabilität

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

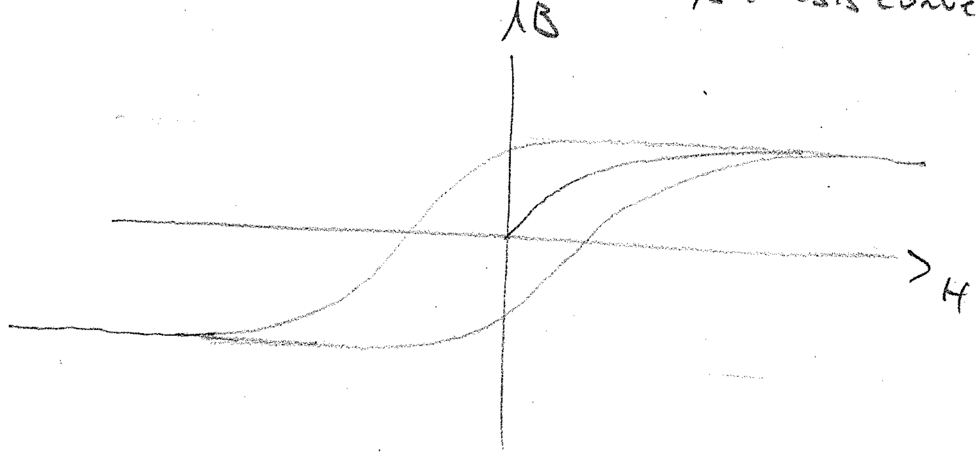
Permeabilitätstensor (Gyromagnetismus)

$$B^i = \mu^i{}_j H^j$$

allgemein jedoch nichtlinearen Zusammenhang

$$\mu = \frac{dB}{dH}$$

Hysteresiskurve:



$\mu \gg 1$ .... Ferromagnetismus

$\mu > 1$ .... Paramagnetismus: $\vec{B}$ und $\vec{M}$ zeigen in selbe Richtung

$\mu < 1$ ... Diamagnetismus: $\vec{B}$ und $\vec{M}$ antiparallel orientiert

Zusammenfassung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{D} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

$$\vec{H} = \vec{B} - \frac{4\pi}{c}\vec{M} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\times(\vec{D}-\vec{E})$$

$$\vec{M}(t,\vec{x}) = \sum_{n\in M}\vec{m}_n(t)\,\langle\delta(\vec{x}-\vec{X}_n(t))\rangle$$

$$\vec{P}(t,\vec{x}) = \sum_{n\in M}\Big(\vec{p}_n(t)\,\langle\delta(\vec{x}-\vec{X}_n(t))\rangle +$$

$$-\frac{1}{2}\overleftrightarrow{Q}_n(t)\cdot\vec{\nabla}\,\langle\delta(\vec{x}-\vec{X}_n(t))\rangle$$