Theoretische Elektrodynamik

Grundlegende Organisation der Lehrveranstaltung

- Team & Termine
  - Wolfgang Wieland : Vorlesung
    Do 14:00 – 16:00
    SR 13101.01.683 | wolfgang.wieland@fau.de
  - Philipp Erhardt : Übungsgruppe 1
    Mo 10:00 – 12:00
    SR 00.103
  - Johannes Große : Übungsgruppe 2
    Di 10:00 – 12:00
    SR 02.779
- Webseite
  www.studon.fau.de/campo/course/344760

- Übungsbonus: 0,3 auf Gesamtnote
- Literatur
  - Vorlesungsskriptum (handschriftlich)
  - David J. Griffiths
    Introduction to Electrodynamics
  - John D. Jackson
    Classical Electrodynamics
- Inhalt der Lehrveranstaltung

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{1. Elektrostatik} \\ \text{2. Magnetostatik} \\ \text{3. Elektrodynamik} \\ \text{4. Relativitätstheorie} \end{array}}$$

~ 3 Vorlesungen je 2 × 45 min
für jedes Kapitel

1. Elektrostatik

Grundlegende Konzepte

Physik lässt sich in verschiedene Bereiche organisieren, in dieser Vorlesung

klassische Physik $\xleftrightarrow{0 \leftarrow \hbar}$ Quantenphysik

$\left.\begin{array}{l} \vec{p}(t) = m\,\vec{v}(t) \\ \vec{x}(t) \end{array}\right\}$ beliebig genau messbar

$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$

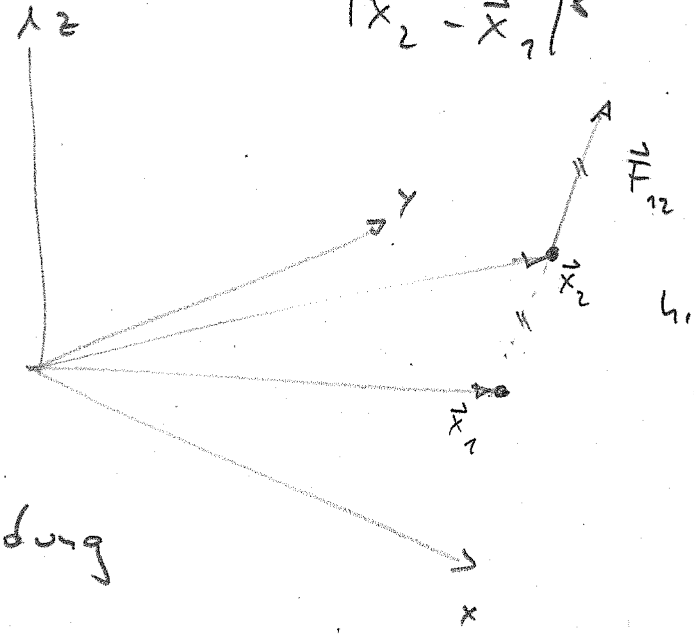
Mechanik von Punktteilchen $\xleftrightarrow{N \to \infty}$ Dynamik von Feldern

Newton'sche Raum- und Zeitbegriffe $\xleftrightarrow{0 \leftarrow c}$ relativistischen Raumzeitbegriff

Coulomb'sches Gesetz

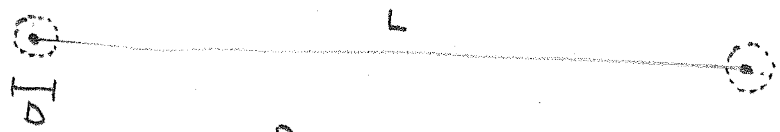
Zwischen zwei einzelnen Punktladungen an den Orten $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ mit Ladungen q_1 und q_2 wirkt vom ersten auf das zweite Teilchen die Kraft

$$\vec{F}_{12} = k\, q_1 q_2 \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3}$$



hier: $q_1 q_2 > 0$

Punktladung



$$\frac{D}{L} \ll 1$$

Kraft auf erstes Teilchen

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad [3.\ \text{Newton'sches Gesetz}]$$

Vergleich mit Gravitationsgesetz

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \quad [2.\ \text{Newton'sches Gesetz}]$$

$$\vec{F}_{12}^{\,\text{Coulomb}} = k\, q_1 q_2 \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} = m_2 \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_2$$

- positive & negative Ladungen
  Abstoßung & Anziehung moglich
- Elektron $q_e = -e$
  Proton $q_p = +e$

$$\vec{F}_{12}^{\,\text{Newton}} = -G\, m_1 m_2 \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} = m_2 \frac{d^2}{dt^2}\vec{x}_2$$

- Schwere und inertiale Masse gleich
- Nur positive Massen, Gravitation wirkt nur anziehend
- gewinnt auf großen Skalen

Einheiten und Konstanten

$$k = \begin{cases} 1 & \text{gaußsche Einheiten [cgs]} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} & \text{SI [MkgsA]} \\ \frac{1}{4\pi} & \text{Heaviside Lorentz} \end{cases}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{e^2}{4\pi\alpha} \frac{1}{\hbar c}$$

e ... elektrische Elementarladung

$e \approx 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ C$

$\hbar$ ... Planck'sches Wirkungsquantum

$\hbar \approx 1{,}05 \cdot 10^{-34}\ Js$

c ... Lichtgeschwindigkeit

$c \approx 300\,000\ \frac{km}{s}$

das sind letztlich nur Konversionsfaktoren zwischen Energie, Masse, Länge, Zeit

α ... Feinstrukturkonstante

$\alpha \approx \frac{1}{137}$

natürliche Einheiten

$\hbar = 1 = c$

Elektrisches Feld

- Es sei Ladungsverteilung gegeben
- Es werde an jedem Punkt des Raumes die Kraft $\vec{F}(\vec{x})$ auf eine idealisierte Punktladung q gemessen.
- Faraday'schen Feldbegriff: Kraft durch lokale Zustandsgröße, das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{x})$, bestimmt

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{q}\vec{F}(\vec{x})}$$

- unabhangig von Wahl von q

Verteilung von Punktladungen

Ladungen $q_1, \dots, q_N$ an Orten $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}}$$

Es gilt also das Superpositionsprinzip

Kontinuierliche Ladungsverteilung

$$\sum_{j:\, \vec{x}_j \in V} \longrightarrow \int_V d^3x \; \rho(\vec{x})$$

$$V = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N\}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3x' \; \rho(\vec{x}\,') \frac{\vec{x} - \vec{x}\,'}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|^3}}$$

Punktladungen als singuläre Dichteverteilungen

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{N} q_j \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_j)$$

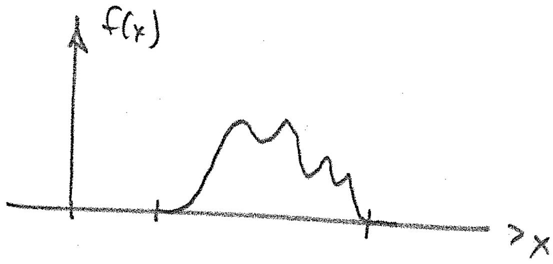
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

wobei

(i) $\delta(\vec{x} - \vec{x}_j) = \delta(x - x_j)\,\delta(y - y_j)\,\delta(z - z_j)$

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \delta(x) = 1$

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \delta(x) f(x) = f(0)$



(iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \; \frac{d}{dx}\delta(x) f(x) = -\left(\frac{d}{dx} f\right)(0)$

Einschub: Vektoranalysis

Vektorprodukt

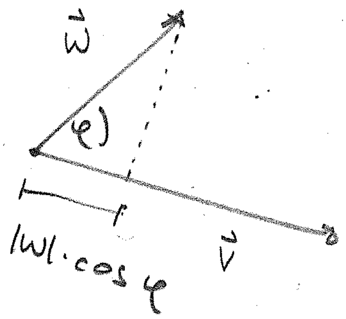
$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V^x \\ V^y \\ V^z \end{pmatrix} \; ; \qquad V^i , \quad i = x, y, z$$

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = V^x W^x + V^y W^y + V^z W^z = \sum_{i,j} \delta_{ij} V^i W^j =$$

$$= \delta_{ij} V^i W^j = V_i W^i$$

↳ Einstein'sche Summenkonvention

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = |\vec{V}| \cdot |\vec{W}| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{V}, \vec{W}))$$

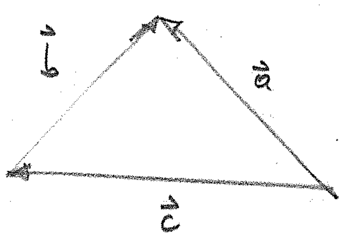


$$V_i = \delta_{ij} V^j$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Pythagoras

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos\varphi$$

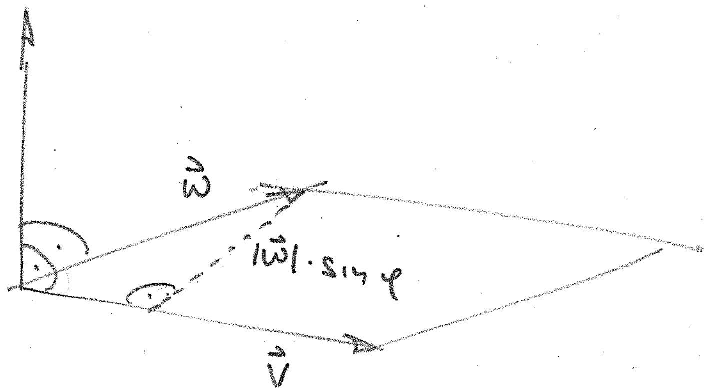


Kreuzprodukt

$$\vec{V} \times \vec{W} = \begin{pmatrix} V^x \\ V^y \\ V^z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} W^x \\ W^y \\ W^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^y W^z - V^z W^y \\ V^z W^x - V^x W^z \\ V^x W^y - V^y W^x \end{pmatrix}$$

$$(\vec{V} \times \vec{W}) \perp \mathrm{Span}(\vec{V}, \vec{W})$$

$$|\vec{V} \times \vec{W}| = |\vec{V}| \cdot |\vec{W}| \cdot \sin(\sphericalangle(\vec{V}, \vec{W}))$$



in Indexnotation

$$(\vec{V} \times \vec{W}) = \epsilon^i{}_{jk} V^j W^k$$

wichtige Identitäten

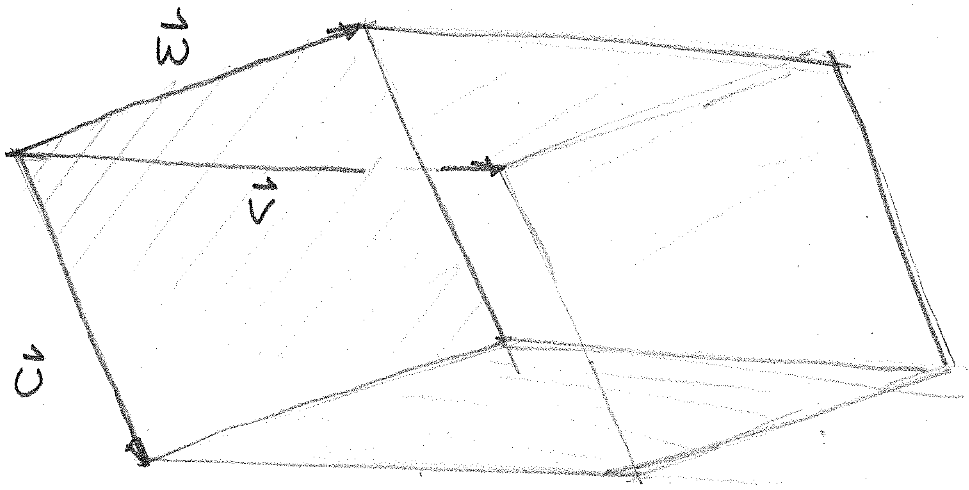
$$(\vec{X} \times \vec{Y}) \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = (\vec{X} \cdot \vec{U})(\vec{Y} \cdot \vec{V}) - (\vec{X} \cdot \vec{V})(\vec{Y} \cdot \vec{U})$$

$$\epsilon_{\ell ij} \, \epsilon^{\ell}{}_{mn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$$

$$\vec{U} \times (\vec{V} \times \vec{W}) = \vec{V} (\vec{U} \cdot \vec{W}) - \vec{W} (\vec{U} \cdot \vec{V})$$

Spatprodukt

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$



$$|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = \mathrm{Vol}(\mathrm{Spat}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}))$$

Gradient

es sei $\Phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x, y, z, definiere

$$\vec{\nabla}\Phi := \begin{pmatrix} \partial_x \Phi \\ \partial_y \Phi \\ \partial_z \Phi \end{pmatrix}$$

Indexnotation

$$\nabla^i \Phi = \delta^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \Phi \equiv \delta^{ij} \partial_j \Phi$$

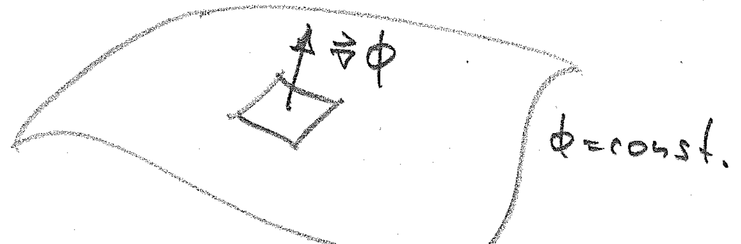
Kettenregel

es sei $\vec{x}(t)$ eine (glatte) Kurve

$$\frac{d}{dt} \Phi(\vec{x}(t)) = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) \cdot (\vec{\nabla}\Phi)(\vec{x}(t)) =$$

$$= \dot{x}^i(t) \, (\partial_i \Phi)(\vec{x}(t))$$

Gradient steht normal auf Φ=const. Flächen



Divergenz

es sei $\vec{V}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} V^x(\vec{x}) \\ V^y(\vec{x}) \\ V^z(\vec{x}) \end{pmatrix}$ mindestens einmal differenzierbares Vektorfeld

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{x}) = \partial_x V^x(\vec{x}) + \partial_y V^y(\vec{x}) + \partial_z V^z(\vec{x}) =$$
$$= \partial_i V^i(\vec{x})$$

Rotation

$\vec{V}(\vec{x})$ wie oben, definiere

$$(\vec{\nabla}\times\vec{V})(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V^x \\ V^y \\ V^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y V^z - \partial_z V^y \\ \partial_z V^x - \partial_x V^z \\ \partial_x V^y - \partial_y V^x \end{pmatrix}$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{V})^i = \epsilon^{il}{}_m\, \partial_l V^m$$

Krummlinige Koordinatensysteme

- kartesische Koordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; ; \quad x^i \, , \quad i = x, y, z$$

- krummlinige Koordinaten

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \; ; \quad u^a \, , \quad a = 1, 2, 3$$

- Basisvektoren

$$\vec{e}_a = \frac{\partial}{\partial u^a} \vec{x}(u, v, w) \equiv \partial_a \vec{x}$$

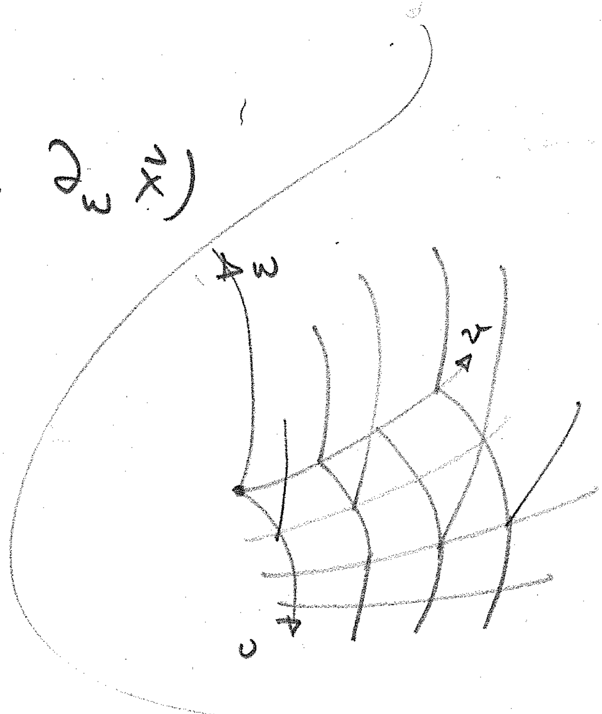
- Jacobi-Matrix

$$J := \left(\partial_u \vec{x} \, , \, \partial_v \vec{x} \, , \, \partial_w \vec{x} \right)$$

Spaltenindex

$$J^i{}_a = \partial_a x^i$$

Zeilenindex



- Inverse Jacobi-Matrix

invertiere die Koordinatentransformation

$$\vec{x}(u,v,w) \rightsquigarrow u^a(x,y,z)$$

$$J^{-1} = (\vec{\nabla} u, \vec{\nabla} v, \vec{\nabla} w)^T$$

Spaltenindex

$$[J^{-1}]^a{}_i = \partial_i u^a$$

Zeilenindex

$$J^i{}_a [J^{-1}]^a{}_k = \frac{\partial u^a(x,y,z)}{\partial x^k} \frac{\partial x^i(u,v,w)}{\partial u^a}\Big|_{u^a(\vec{x})} =$$

$$= \delta^i_k$$

Kettenregel

• duale Basis

auch in anderen Gebieten wichtig
Kristallographie, Festkörperphysik,
Relativitätstheorie, ...

$$\vec{f}^a = \frac{1}{\det(J)} \vec{e}_b \times \vec{e}_c \quad (\text{zyklisch})$$

umbenennen damit

$$\vec{f}^a \cdot \vec{e}_b = \delta^a_b$$

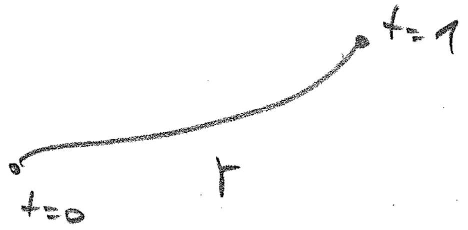
damit

$$J^{-1} = (\vec{f}^u, \vec{f}^v, \vec{f}^w)^T$$

also

$$\boxed{\vec{f}^a = \vec{\nabla} u^a}$$

Linienintegral eines Gradientenvektorfeldes



$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \longmapsto \vec{x}(t)$

$$\int_0^1 dt \, \frac{d}{dt} \phi(\vec{x}(t)) = \phi(\vec{x}(1)) - \phi(\vec{x}(0)) =$$

$$= \int_0^1 dt \, \frac{d}{dt} \vec{x}(t) \cdot (\vec{\nabla} \phi)(\vec{x}(t)) =$$

$$= \int_\gamma d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} \phi$$

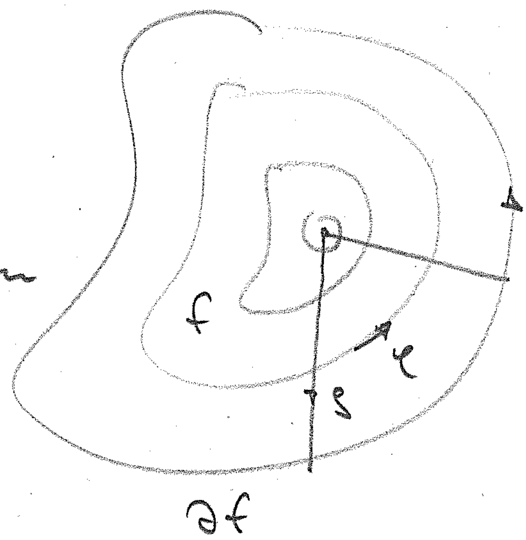
$$\boxed{\int_\gamma d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} \phi = \phi(\vec{x}(1)) - \phi(\vec{x}(0))}$$

beachte daß die Zirkulation eines Gradientenvektorfeldes entlang eines geschlossenen Pfades verschwindet, d.h.

$$\oint_\alpha d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0$$

Satz von Stokes

Betrachte mit polarartigen Koordinaten (ρ, φ) parametrisierte



Fläche $f: [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \;;\; (\rho, \varphi) \mapsto \vec{x}(\rho, \varphi)$

Orientiertes Flächenelement

$$d^2\vec{S} = d\rho\, d\varphi\; \partial_\rho \vec{x} \times \partial_\varphi \vec{x}$$

[illegible]

$$\int_f d^2\vec{S}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V}) =$$

$$= \int_f d\rho\, d\varphi\, (\partial_\rho\vec{x}\times\partial_\varphi\vec{x})\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V}) =$$

$$\boxed{\begin{array}{l|l} \partial_\rho\vec{x}\cdot\vec{\nabla} = \frac{d}{d\rho} & \\ \partial_\varphi\vec{x}\cdot\vec{\nabla} = \frac{d}{d\varphi} & \frac{d}{d\varphi}\partial_\rho\vec{x} - \frac{d}{d\rho}\partial_\varphi\vec{x} = 0 \end{array}}$$

$$= \int_f d\rho\, d\varphi\, \left[\partial_\varphi\vec{x}\cdot\frac{d}{d\rho}\vec{V} - \partial_\rho\vec{x}\cdot\frac{d}{d\varphi}\vec{V}\right] =$$

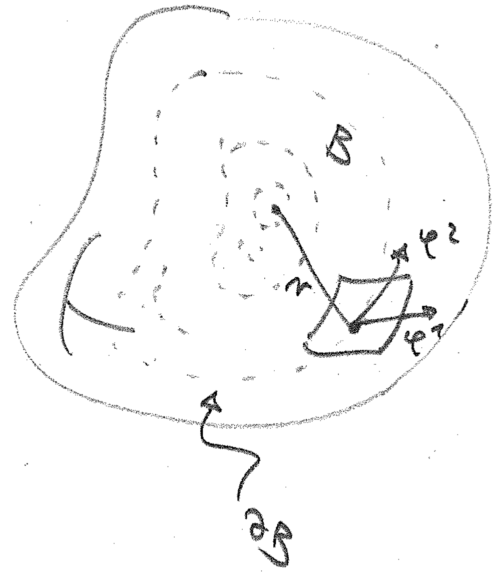
$$= \int_f d\rho\, d\varphi\, \left[\frac{d}{d\rho}(\partial_\varphi\vec{x}\cdot\vec{V}) - \frac{d}{d\varphi}(\partial_\rho\vec{x}\cdot\vec{V})\right] =$$

$$= \oint_{\partial f} d\varphi\, \partial_\varphi\vec{x}\cdot\vec{V} = \oint_{\partial f} d\vec{x}\cdot\vec{V}$$

$$\boxed{\int_f d^2\vec{S}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{V}) = \oint_{\partial f} d\vec{x}\cdot\vec{V}}$$

Satz von Gauß

betrachte Gebiet B mit „zwiebelförmigen" Koordinatensystem $(r, \varphi^1, \varphi^2)$, wobei



(i) $r = \text{const}$ Flächen das Gebiet B foliieren .... Zwiebelschalen

(ii) $f_{r=0}$ auf einen Punkt zusammenschrumpfe

(iii) $f_{r=1} = \partial B$ sei

betrachte die Basiszerlegung

$\vec{V} = V^a \vec{e}_a$ (mit Einstein'scher Summenkonvention)

$\vec{\nabla} = \vec{f}^a \partial_a$ (folgt aus Kettenregel) so folgt zunächst

$$\int_B d^3x\, \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \int_B d^3x\, \vec{f}^a\cdot\partial_a\vec{V} =$$

$$= \int_B d^3x\, \vec{f}^a\cdot\partial_a(V^b\vec{e}_b) =$$

$$= \int_B d^3x\, [\, \partial_a V^a + V^b\, \vec{\nabla}\cdot\vec{e}_b \,]$$

beachte das Volumenelement in den neuen Koordinaten

$$d^3x = dr\, d\varphi^1\, d\varphi^2\, \det(J)$$

(als rechtshändiges Koordinatensystem angenommen)

• Divergenz der Basisvektoren

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_a = \vec{f}^b \cdot \partial_b \vec{e}_a = \vec{f}^b \cdot \partial_b \partial_a \vec{x} =$$

$$= \vec{f}^b \cdot \partial_a \partial_b \vec{x} =$$

$$= [J^{-1}]^b{}_i \, \partial_a [J^i{}_b] =$$

$$= Sp(J^{-1} \partial_a J)$$

- Ableitung der Determinante

betrachte

$$\det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \det(J)$$

für Matrix $J = (\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$

so gilt unmittelbar bestimmt

$$A^i \frac{\partial}{\partial A^i} \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$$

$$B^i \frac{\partial}{\partial A^i} \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \det(\vec{B}, \vec{B}, \vec{C}) = 0$$

$$C^i \frac{\partial}{\partial A^i} \det(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}) = \det(\vec{C}, \vec{B}, \vec{C}) = 0$$

mit anderen Worten

$$J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial A^1} & \frac{\partial}{\partial A^2} & \frac{\partial}{\partial A^3} \\ \frac{\partial}{\partial B^1} & \frac{\partial}{\partial B^2} & \frac{\partial}{\partial B^3} \\ \frac{\partial}{\partial C^1} & \frac{\partial}{\partial C^2} & \frac{\partial}{\partial C^3} \end{pmatrix} \det(J)$$

damit folgt jedoch weiters für die Ableitung der Jacobimatrix nach den $(r, \varphi^1, \varphi^2)$ Koordinaten dort

$$\partial_a \det(J) = \frac{\partial}{\partial u^a} \det(J) =$$

$$= \frac{\partial J^b{}_i}{\partial u^a} \frac{\partial}{\partial J^b{}_i} \det(J) =$$

Kettenregel

$$= \frac{\partial J^b{}_i}{\partial u^a} [J^{-1}]^i{}_b \det(J) =$$

$$= \det(J)\ \mathrm{Sp}(J^{-1} \partial_a J)$$

wir erhalten also für die Divergenz der Basisvektoren $\vec{e}_a = \partial_a \vec{x}$ den Ausdruck

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e}_a = [\det(J)]^{-1} \partial_a \det(J)$$

damit folgt für das Integral der Divergenz des Vektorfeldes $\vec{V}$ über das Gebiet B

$$\int_B d^3x\, \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \int_B d^3x \left[\partial_a V^a + V^b\, \vec{\nabla} \cdot \vec{e}_b \right] =$$

$$= \int_B dr\, d\varphi^1\, d\varphi^2 \det(J) \Big[\partial_a V^a + V^b [\det(J)]^{-1} \partial_b \det(J) \Big] =$$

$$= \int_B dr\, d\varphi^1\, d\varphi^2\, \partial_a \left[\det(J)\, V^a \right]$$

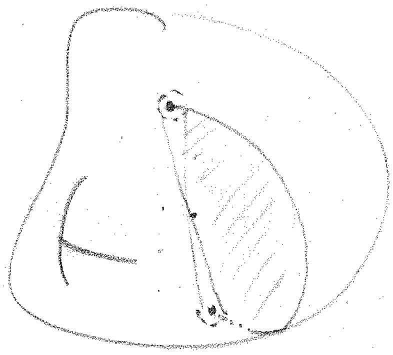
es folgt dann weiter

$$\int_B d^3x \; \vec{\nabla}\cdot\vec{V} \; \overset{\uparrow}{=} \quad \left[\vec{V} = \vec{e}_r V^r + \vec{e}_1 V^1 + \vec{e}_2 V^2 \right]$$

$$\vec{e}_{1,2} = \partial_{\varphi^{1,2}} \vec{x}$$

$$= \int_B dr\, d\varphi^1 d\varphi^2 \Big[\frac{d}{dr}\left(V^r \det(J)\right) + \underbrace{\frac{d}{d\varphi^1}\left(V^1 \det(J)\right) + \frac{d}{d\varphi^2}\left(V^2 \det(J)\right)}_{\to\, 0} \Big]$$

$$= \int_{\partial B} d\varphi^1 d\varphi^2 \; V^r \det(J)$$



es ist jedoch

$$V^r = \vec{f}^r\cdot\vec{V} = \frac{1}{\det(J)} \left(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\right)\cdot\vec{V}$$

$$d^2\vec{S} = d\varphi^1 d\varphi^2 \; \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$$

also

$$\boxed{\int_B d^3x \; \vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \int_{\partial B} d^2\vec{S}\cdot\vec{V}}$$